ÜBER DIE SYMBOLISCHE DARSTELLUNG

DER

GRUNDSYZYGANTEN EINER BINÄREN FORM

SECHSTER ORDNUNG

UND EINE

ERWEITERUNG DER SYMBOLIK VON CLEBSCH.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DES DOKTORGRADES

DER

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT DER UNIVERSITÄT ERLANGEN

VORGELEGT VON

EMIL STROH.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1890.

ÜBER DIE SYMBOLISCHE DARSTELLUNG

DER

GRUNDSYZYGANTEN EINER BINÄREN FORM

SECHSTER ORDNUNG

UND EINE

ERWEITERUNG DER SYMBOLIK VON CLEBSCH.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DES DOKTORGRADES

DER

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT DER UNIVERSITÄT ERLANGEN

VORGELEGT VON

EMIL STROH.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1890.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545817_0058

Durch die Arbeiten von Perrin*), Stephanos**), Hammond***) und v. Gall†) sind bis jetzt im Ganzen 204 irreducible Syzyganten der binären Form sechster Ordnung aufgefunden worden und zwar wurden dieselben durch Anwendung der verschiedenartigsten, oft recht umständlichen Methoden berechnet. Der Zweck dieser Arbeit ist nun, nachzuweisen, dass *sämmtliche* 204 *Syzyganten verschiedene Formen von im Ganzen nur* 11 *elementaren Syzyganten* sind. Bezeichnet man alsdann jede elementare Syzygante durch ein Symbol von der Art $[f\varphi\psi\chi]_i = 0$, so sind demnach *sämmtliche Syzyganten durch nur* 11 *verschiedene Symbole* darstellbar und zugleich vollständig dadurch bestimmt.††) Diese Darstellung der Syzyganten ist in § 5 in der Weise durchgeführt, dass noch 2 weitere Symbole adjungirt wurden, die jedoch mit den übrigen in einfacher Weise zusammenhängen. (Vgl. § 4).

Bis zum Grade 9 wurde auch die *Auswerthung* der symbolischen Syzyganten beigefügt und zwar aus dem Grunde, weil diese in den Anwendungen am häufigsten vorkommen und weil die *Ableitung* dieser Syzyganten aus den angeführten Arbeiten grösstentheils nicht ersehen werden kann. Es mag auch darauf hingewiesen werden, dass jede Syzygante *unabhängig von den übrigen* erhalten wird, wodurch fehlerhafte Resultate möglichst vermieden werden. Da jede irreducible Syzygante noch auf sehr viele verschiedene Arten symbolisch darstellbar ist, so wurde auch darauf Rücksicht genommen, dass das in jedem besonderen Falle gewählte Symbol bei der Auswerthung möglichst

*) Comptes rendus Vol. XCVI.

**) Ebenda.

***) American Journal of Math. Vol. VII.

†) Math. Annalen Bd. 35, pag. 63.

††) Vgl. Math. Annalen Bd. 34, pag. 354, wo der Nachweis geführt wurde, dass die Grundsyzyganten der binären Form *fünfter* Ordnung durch nur 4 elementare Syzyganten darstellbar sind.

wenig Mühe verursache. Derjenige Theil der berechneten Syzygante, aus welchem die Irreducibilität derselben ersichtlich ist, wurde durchgehends beigefügt und durch das Zeichen $\equiv$ mit dem Symbole verbunden.

Im zweiten Theile vorliegender Arbeit, der mit § 7 beginnt, habe ich eine Erweiterung der Symbolik von Clebsch entwickelt, durch deren Benutzung es möglich wird, neuere Untersuchungen von Cayley, Mac Mahon u. A. über Seminvarianten und Perpetuanten in den Kreis der symbolischen Methode hereinzuziehen. Es zeigt sich nämlich, dass der „Klammerfactor" von Clebsch nur eine specielle Form eines allgemeineren invarianten „Grundsymbols" ist. Durch Benützung dieser Grundsymbole gestaltet sich dann der Ausdruck der Covarianten übersichtlicher, insbesondere die Seminvarianten können als einfache Potenzen von Grundsymbolen dargestellt werden. Es hat dann keine Schwierigkeit, nicht nur die *Zahl* der linear unabhängigen Seminvarianten und Perpetuanten zu bestimmen, sondern es ist auch ermöglicht, diese Formen in symbolischer Gestalt sofort hinzuschreiben. Zum Schlusse wird noch das *ternäre* Grundsymbol aufgestellt und dadurch gezeigt, dass die Uebertragung dieser Symbolik auf Formen mit mehr Veränderlichen keinen Schwierigkeiten begegnet.

§ 1.

Methode zur Entwicklung der elementaren Syzyganten $[f_1 f_2 f_3 f_4]_i = 0$.

Das Verfahren, welches alle linearen Relationen zwischen Covarianten gleicher Ordnung und gleichen Grades aufzufinden gestattet*), kann auch zur Entwicklung jeder Syzygante gebraucht werden. Insbesondere werden die elementaren Syzyganten $[f_1 f_2 f_3 f_4]_i = 0$ in folgender Weise erhalten.

Aus den vier Formen $f_1 f_2 f_3 f_4$ lassen sich 15 Gruppen von Ueberschiebungen bilden, deren jede im allgemeinen *zerfallende* Formen enthalten wird. So gehören zur ersten Gruppe die zerfallenden Formen $f_1 \left((f_2 f_3)^2 f_4\right)^{i-\lambda}$, zur zweiten die Formen $f_1 \left((f_2 f_4)^2 f_3\right)^{i-\lambda}$ etc. etc. Da

*) Vgl. Math. Annalen Bd. 33, pag. 93 u. f. Ein andrer Weg zur Auffindung dieser Relationen ist neuerdings von Herrn Study (Methoden zur Theorie der ternären Formen pag. 97) angegeben worden. Darnach müsste das Product $f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z) \cdot f_4(t)$ auf mehrere verschiedene Arten nach der Gordan'schen Reihe entwickelt werden. Allein da die Durchführung einer solchen Reihenentwicklung schon in den einfachsten Fällen mit grossen rechnerischen Schwierigkeiten verknüpft ist, so dürften auf diesem Wege kaum praktische Resultate gewonnen werden können. Ganz ähnlich verhält es sich bekanntlich mit der aus der Theorie der associirten Formen entspringenden Methode, die ebenfalls unausführbare Rechnungen erfordern würde, obwohl sie theoretisch das Problem löst.

nun aber nach einem Mathematische Annalen Bd. 33, pag. 68 bewiesenen Satze die letzteren Formen durch die ersteren linear ausgedrückt werden können, so kommen diese vorläufig nicht in Betracht. Es bleiben demnach nur noch 7 Gruppen von Ueberschiebungen zurück. Die Zahl der darin vorkommenden zerfallenden Formen soll nun bestimmt werden.

Seien die Formen nach fallenden Ordnungszahlen geordnet, so dass

$$n_1 \geqq n_2 \geqq n_3 \geqq n_4$$

und bezeichne ε_k die Differenz $i - n_k$ mit der Bedingung, dass dieselbe stets $= 0$ zu nehmen ist, sobald sie negativ ausfallen würde, dann ist die Anzahl der zerfallenden Formen durch die beigesetzte Zahl angegeben

$$\begin{aligned}
&(f_1 f_2)^\lambda (f_3 f_4)^\mu && \text{Anzahl} && i + 1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_4,\\
&(f_1 f_3)^\lambda (f_2 f_4)^\mu && \text{,,} && i + 1 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4,\\
&(f_1 f_4)^\lambda (f_2 f_3)^\mu && \text{,,} && i + 1 - \varepsilon_4 - \varepsilon_3,\\
&f_1 \left((f_2 f_3)^\lambda f_4\right)^\mu && \text{,,} && i + 1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4,\\
&f_2 \left((f_1 f_3)^\lambda f_4\right)^\mu && \text{,,} && i + 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4,\\
&f_3 \left((f_1 f_2)^\lambda f_4\right)^\mu && \text{,,} && i + 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_4,\\
&f_4 \left((f_1 f_2)^\lambda f_3\right)^\mu && \text{,,} && i + 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3.
\end{aligned}$$

Bei dieser Anordnung sind jedoch die Formen

$$f_r f_k (f_l f_m)^i$$

dreifach gerechnet, da dieselben in drei verschiedenen Gruppen vorkommen. Die Zahl dieser Formen ist nun aber gleich $\binom{\nu}{2}$, wenn ν die Zahl der verschwindenden ε ist und somit wird die Gesammtzahl der zerfallenden Formen

$$Z = 7 \,.\, (i + 1) - 6\varepsilon_4 - 5\varepsilon_3 - 4\varepsilon_2 - 3\varepsilon_1 - \nu(\nu - 1).$$

Durch Anwendung des *associativen Gesetzes* für die Ueberschiebung kann nun jede zerfallende Form durch die Formen ein und derselben Gruppe linear ausgedrückt werden. Nehmen wir beispielsweise als solche die Gruppe der Formen

$$[(f_1 f_2)^\lambda (f_3 f_4)^\mu]^\nu \quad \lambda + \mu + \nu = i,$$

dann wird die *Zahl* dieser Formen durch den Coefficienten von x^i in folgender Entwicklung angegeben:

$$\frac{(1 - x^{n_1+1})\,(1 - x^{n_2+1})\,(1 - x^{n_3+1})\,(1 - x^{n_4+1})}{(1 - x)^3} = \sum_\lambda A_\lambda x^\lambda,$$

Der Umstand, dass i nicht grösser anzunehmen ist, als $n_3 + n_4$, weil

sonst in vier Gruppen die zerfallenden Formen ganz wegfallen würden und eine brauchbare Syzygante nicht erhalten werden könnte (Beweis am Schlusse des § 3), gestattet nun, diese Entwicklung in folgender Weise vorzunehmen:

$$(1 - x^{n_1+1} - x^{n_2+1} - x^{n_3+1} - x^{n_4+1}) \sum_{\lambda} \binom{i+2}{2} x^{\lambda}.$$

Daher wird der Coefficient von x^i

$$A_i = \binom{i+2}{2} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=4} \binom{\varepsilon_\lambda + 1}{2}.$$

Es sind folglich die Z zerfallenden Formen durch A_i Formen linear dargestellt, die selbst linear unabhängig sind. Durch Elimination der letzteren Formen müssen sich folglich mindestens $Z - A_i$ oder

$$S = \frac{1}{2}\big((i+1)(12-i) - \varepsilon_1(5-\varepsilon_1) - \varepsilon_2(7-\varepsilon_2) - \varepsilon_3(9-\varepsilon_3) - \varepsilon_4(11-\varepsilon_4) - 2\nu(\nu-1)\big)$$

Syzyganten ergeben. Daher gilt der Satz:

Zwischen vier Formen $f_1 f_2 f_3 f_4$, die nach abnehmenden Ordnungszahlen geordnet seien, existiren mindestens

(1) $$\frac{1}{2}[(i+1)(12-i) - \varepsilon_1(5-\varepsilon_1) - \varepsilon_2(7-\varepsilon_2) - \varepsilon_3(9-\varepsilon_3) - \varepsilon_4(11-\varepsilon_4) - 2\nu(\nu-1)]$$

elementare Syzyganten $[f_1 f_2 f_3 f_4]_i = 0$. Hierin ist $\varepsilon_\varkappa = i - n_\varkappa$ stets gleich Null zu setzen, sobald es negativ ausfallen würde, während ν die Zahl der verschwindenden ε bedeutet.

So berechnet sich die Zahl der Syzyganten $[f_1 f_2 f_3 f_4]_2 = 0$, wenn alle Formen f von der zweiten oder von höherer Ordnung sind, gleich 3. Es sind dies die Syzyganten

$$[f_1 f_2 f_3 f_4]_2 = \sum_{\lambda} \binom{2}{\lambda} (f_1 f_2)^{\lambda} (f_3 f_4)^{2-\lambda} - \sum_{\lambda} \binom{2}{\lambda} (f_1 f_4)^{\lambda} (f_3 f_2)^{2-\lambda} = 0,$$

$$[f_1 f_2 f_4 f_3]_2 = \sum_{\lambda} \binom{2}{\lambda} (f_1 f_2)^{\lambda} (f_4 f_3)^{2-\lambda} - \sum_{\lambda} \binom{2}{\lambda} (f_1 f_3)^{\lambda} (f_4 f_2)^{2-\lambda} = 0,$$

$$[f_1 f_3 f_2 f_4]_2 = \sum_{\lambda} \binom{2}{\lambda} (f_1 f_3)^{\lambda} (f_2 f_4)^{2-\lambda} - \sum_{\lambda} \binom{2}{\lambda} (f_1 f_4)^{\lambda} (f_2 f_3)^{2-\lambda} = 0,$$

und alle übrigen wie z. B.

$$\{f_1 f_2 f_3 f_4\}_2 = (f_1 f_2)(f_3 f_4) + (f_2 f_3)(f_1 f_4) + (f_3 f_1)(f_2 f_4) = 0$$

lassen sich folglich aus den drei ersten linear zusammensetzen. In den meisten Fällen ist nun aber die Anzahl der Syzyganten noch grösser, als sie durch obige Zahl bestimmt werden kann. Es rührt

dies daher, dass die linearen Functionen, durch welche die Z zerfallenden Formen ausgedrückt sind, von specieller Natur sind, derart, dass gewisse Determinanten aus den Coefficienten dieser Functionen verschwinden. Diese Fälle machen es nothwendig, die oben angegebenen Entwicklungen der Z zerfallenden Formen nach den Formen einer Gruppe wirklich vorzunehmen, um ein Urtheil über die Zahl der existirenden Syzyganten zu erhalten.

§ 2.

Entwicklung einiger elementaren Syzyganten $[f_1 f_2 f_3 f_4]_i = 0$.

Ausser den schon bei der Form fünfter Ordnung benützten Syzyganten $[f_1 f_2 f_3 f_4]_i = 0$ werden im Folgenden noch weitere Syzyganten vom Gewichte 4, 5 und 6 nothwendig werden, die nun zunächst nach der beschriebenen Methode abgeleitet werden sollen. Auch gelangt man durch Umformung schon bekannter Syzyganten häufig schneller zum Ziele.

1. Entwicklung von $[f\varphi\psi q]_4 = 0$.

Seien f, φ, ψ und χ Formen vierter Ordnung, dann existirt die folgende Syzygante

$$\begin{aligned}[f\varphi\psi\chi]_4 + [f\varphi\chi\psi]_4 - [f\psi\varphi\chi]_4 = 2[&(f\varphi)^4\psi\chi - (f\psi)^4\varphi\chi + 6(f\varphi)^2(\psi\chi)^2 \\ &+ f\varphi(\psi\chi)^4 + 4(f\chi)^3(\varphi\psi) + 4(f\chi)(\varphi\psi)^3 \\ &- f\psi(\varphi\chi)^4 - 6(f\psi)^2(\varphi\chi)^2] = 0.\end{aligned}$$

In derselben kann nun der Theil

$$P = f\varphi(\psi\chi)^4 - f\psi(\varphi\chi)^4 + 4(\varphi\psi)(f\chi)^3$$

derart umgeformt werden, dass ausser den schon vorhandenen Covariantenproducten nur die folgenden vier neuen Formen auftreten:

$$\begin{aligned} A &= (ad)^2 (ac)^2 d_x^2 c_x^2, & A' &= (ad)^2 (ab)^2 d_x^2 b_x^2, \\ B &= (cd)^2 (ca)^2 d_x^2 a_x^2, & B' &= (bd)^2 (ba)^2 d_x^2 a_x^2. \end{aligned}$$

Führt man zu diesem Zwecke in der Relation $\begin{pmatrix} \chi & f & \psi \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ die Formen A und B ein, so erhält man

$$A - 2\left((f\chi)^3\psi\right)^1 = B - 2\left((\psi\chi)^3 f\right)^1.$$

Ferner lässt sich aus

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} f & \psi & \chi \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_4 = 6\left((f\chi)^2\psi\right)^2 - 2\left((f\chi)^3\psi\right)^1 + (f\chi)^4\psi - (f\psi)^4\chi - (\psi\chi)^4 f \\ + 4\left((\psi\chi)^3 f\right)^1 = 0\end{aligned}$$

und der vorigen Relation die Ueberschiebung $\left((\psi\chi)^3 f\right)^1$ eliminiren, so dass man erhält

$$4\left((f\chi)^3\psi\right)^1 + (\psi\chi)^4 f = 4A + 2B - (f\chi)^4\psi - (f\psi)^4\chi.$$

Vertauscht man φ mit ψ und eliminirt $(f\chi)^4$, so ergiebt sich die gesuchte Form von P:

$$P = 4A\,.\,\varphi + 2B\varphi - 4A'\psi - 2B'\psi - (f\psi)^4\varphi\chi + (f\varphi)^4\psi\chi.$$

Die ganze Syzygante wird nach Einführung dieses Ausdruckes durch d_x^2 theilbar, und wenn ferner mit passenden Potenzen von a_x, b_x, c_x multiplicirt wird, so ergiebt sich die gesuchte Syzygante

$$\begin{aligned}[f\,\varphi\,\psi\,q]_4 = {} & (f\varphi)^4\psi q + 3(f\varphi)^2(\psi q)^2 - (f\psi)^4\varphi q - 3(f\psi)^2(\varphi q)^2 \\ & + 2(fq)\,(\varphi\psi)^3 - 2\psi\left((fq)^2\varphi\right)^2 - \psi\left((\varphi q)^2 f\right)^2 \\ & + 2\varphi\left((fq)^2\psi\right)^2 + \varphi\left((\psi q)^2 f\right)^2 = 0.\end{aligned}$$

Darin bedeutet q eine *quadratische* Form, während f, φ und ψ von der *vierten* oder höherer Ordnung sind.

2. Entwicklung zweier Syzyganten $[f_1 f_2 f_3 f_4]_5 = 0$.

In der aus Früherem bekannten Syzygante

$$\tfrac{1}{2}\left([f\varphi\psi\chi]_5 + [\varphi f\psi\chi]_5 + [f\psi\varphi\chi]_5\right) = 0$$

kommt der Theil

$$P = f\varphi(\psi\chi)^5 - \varphi\psi(f\chi)^5 + \varphi\chi(f\psi)^5$$

vor, der in folgender Weise durch die drei symbolisch dargestellten Formen

$$\begin{aligned}A &= (a\alpha)^4\,(a\beta)\,\alpha_x\beta_x{}^4 \\ B &= (a\beta)^4\,(a\alpha)\alpha_x{}^4\beta_x \\ C &= (\alpha\beta)^3\,(\alpha a)\,(\beta a)\,\alpha_x\beta_x a_x{}^3\end{aligned}$$

wobei $f = a_x{}^5$, $\varphi = b_x{}^5$, $\psi = \alpha_x{}^5$, und $\chi = \beta_x{}^5$ angenommen ist, ausgedrückt werden kann. Mittelst der allgemeinen Formel (4) Math. Annalen Bd. 31, pag. 447 erhält man nämlich die Beziehung

$$(a\alpha)^5\beta_x{}^5 - (a\beta)^5\alpha_x{}^5 + (\alpha\beta)^5 a_x{}^5 = \tfrac{5}{3}A - \tfrac{5}{3}B + \tfrac{10}{3}C,$$

folglich ist

$$P = \varphi\left(\tfrac{5}{3}A - \tfrac{5}{3}B + \tfrac{10}{3}C\right).$$

Nach Einführung dieses Werthes kann der Factor $\alpha_x\,.\,\beta_x$ aus der ganzen Syzygante entfernt werden, ferner können die Ordnungen von f und φ beliebig erhöht werden, so dass man das Resultat erhält:

$$[f\varphi vv']_5 = (f\varphi)^4(vv') + 2(f\varphi)^2(vv')^3 + 2(fv)^3(\varphi v')^2 + (fv)(\varphi v')^4$$
$$- 2(fv')^3(\varphi v)^2 - (fv')^1(\varphi v)^4 - \frac{2}{3}\varphi\left((vv')^3 f\right)^2$$
$$+ \frac{1}{3}\varphi\left((fv)^4 v'\right)^1 - \frac{1}{3}\varphi\left((fv')^4 v\right)^1 = 0.$$

Hierin bedeuten v und v' Formen *vierter* Ordnung, während f und φ von der *fünften* oder von höherer Ordnung sind. Indessen besitzt die ganze Syzygante den symbolischen Factor b_x und verliert daher ihre Giltigkeit nicht, wenn φ ebenfalls von der *vierten* Ordnung ist.

Eine weitere Syzygante vom Gewicht 5 ergiebt sich, wenn man in dem Ausdrucke

$$\frac{1}{2}([f\varphi\psi\chi]_5 + [f\varphi\chi\psi]_5 - [f\psi\varphi\chi]_5)$$

den Theil

$$P = f\chi(\varphi\psi)^5 - \varphi\chi(f\psi)^5$$

derart umformt, dass nur die Covarianten

$$D = (b\alpha)^4(b\alpha)\alpha_x a_x^4,$$
$$E = (a\alpha)^4(ab)\alpha_x b_x^4,$$
$$F = (ab)^3(a\alpha)(b\alpha)a_x b_x \alpha_x^3$$

darin vorkommen. Aus der oben benutzten symbolischen Identität folgt durch Vertauschung von α, β, a mit a, b, α ohne Schwierigkeit

$$P = \frac{3}{2}(f\varphi)^5\psi + 5F + \frac{5}{2}D - \frac{5}{2}E.$$

Nunmehr können die Ordnungen von ψ und χ je um eins erniedrigt und ferner diejenigen von f und φ beliebig erhöht werden. Doch ist alsdann der Ausdruck F nicht mehr als einfache Ueberschiebung darstellbar, sondern muss durch

$$\left((f\varphi)^3 v\right)^2 + \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2 - 6}\left((f\varphi)^4 v\right)^1 - \frac{(n_1 - 4)\,(n_2 - 4)}{2\binom{n_1 + n_2 - 7}{2}}(f\varphi)^5 \cdot v$$

ersetzt werden. Alsdann wird diese Syzygante

$$\{f\varphi vv'\}_5 = 2(f\varphi)^3(vv')^2 + (f\varphi)(vv')^4 + 2(fv')^2(\varphi v)^3 + (fv')^4(\varphi v)$$
$$- 2(fv)^3(\varphi v')^2 - (fv)(\varphi v')^4 - \frac{1}{2}v'\left((fv)^4\varphi\right)^1$$
$$+ \frac{1}{2}v'\left((\varphi v)^4 f\right)^1 + v'\left((f\varphi)^3 v\right)^2 + \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2 - 6}v'\left((f\varphi)^4 v\right)^1$$
$$+ \frac{\binom{n_1 - 3}{2} + \binom{n_2 - 3}{2}}{2\binom{n_1 + n_2 - 7}{2}}(f\varphi)^5 vv' = 0.$$

Auch können die letzten 5 Terme, die sämmtlich den Factor v' besitzen, durch die folgenden ersetzt werden:

$$v'\Big[\tfrac{1}{3}\big((fv)^3\varphi\big)^2 - \tfrac{1}{3}\big((\varphi v)^3 f\big)^2 + \tfrac{1}{6}(f\varphi)^5 v + \tfrac{3n_2-10}{6(n_2-2)}\big((\varphi v)^4 f\big)^1 - \tfrac{3n_1-10}{6(n_1-2)}\big((fv)^4\varphi\big)^1\Big].$$

Dieser Werth ergiebt sich, indem man die Differenz $f(\varphi\psi)^5 - \varphi(f\psi)^5$ — in ähnlicher Weise wie oben — durch die angegebenen Formen ausdrückt.

3. Entwicklung zweier Syzyganten $[f_1f_2f_3f_4]_6 = 0$.

Zunächst soll die Syzygante $[ffvv]_6 = 0$ entwickelt werden, wenn v eine beliebige Form *vierter* Ordnung darstellt, und zwar wird das allgemeine oben beschriebene Verfahren eingeschlagen werden. Darnach müssen sämmtliche zerfallende Formen durch die Formen der Gruppe

(I) $$(ff)^6v^2,\quad (ff)^4(vv)^2,\quad (ff)^2(vv)^4,\quad [(ff)^2v^2]^1,\quad [(ff)^2(vv)^2]^2,\quad [(ff)^4v^2]^2,\quad [f^2,v^2]^6,\quad [f^2,(vv)^2]^4,$$

die linear unabhängig sind, ausgedrückt werden.

Ich benütze die Abkürzungen

$(ff)^2 = H$, $(ff)^4 = i$, $(ff)^6 = A$, $(vv)^2 = \Delta$, $(vv)^4 = B$, $(\varphi v)^\lambda = \varphi_\lambda$,

indem ich zugleich f zunächst als Form *sechster* Ordnung betrachte, und erhalte aus $\begin{pmatrix} f & v & f \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ durch Ueberschiebung über v:

$$\big((f_4f)^1v\big)^1 = 2H_{31} + \tfrac{5}{7}i_{11}.$$

Nun lässt sich H_{31} vermittelst $\begin{pmatrix} v & H & v \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ durch die Formen der Gruppe (I) und zerfallende Formen linear ausdrücken

$$H_{31} = \tfrac{5}{6}H_1 . v - \tfrac{3}{2}(H\Delta)^2 - \tfrac{1}{4}HB,$$

ferner können die beiden andern Formen in bekannter Weise durch zerfallende Formen ersetzt werden. So erhält man eine *erste* Beziehung

(1) $$\tfrac{1}{2}ff_{42} - \tfrac{1}{2}f_4f_2 - \tfrac{1}{3}v(f_4f)^2 - \tfrac{5}{3}vH_4 - \tfrac{5}{14}v . i_2 = -3(H\Delta)^2 - \tfrac{1}{2}HB - \tfrac{5}{14}i\Delta,$$

in welcher nur 3 Formen der Gruppe (I) auftreten.

Eine *zweite* Relation wird erhalten durch Entwicklung der Form $f_3 . f_3$, die in obiger Relation noch nicht vorkommt. Bildet man die Differenz der Relationen

$$\begin{pmatrix} f & v & f_3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} f_3 & v & f \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

dann hat man zunächst

$$f_3^2 - f \cdot f_{33} = 3\left((ff_3)^1 v\right)^2 - \tfrac{3}{4}\left((ff_3)^2 v\right)^1 + \tfrac{3}{7}(ff_3)^3 \cdot v.$$

Nachdem hierin die Ueberschiebungen $(ff_3)^1$ und $(ff_3)^2$ in bekannter Weise durch die Formen $\left((ff)^{2\lambda} v\right)^\mu$ ausgedrückt sind, erhält man schliesslich

$$f_3^2 - f \cdot f_{33} - \tfrac{3}{4}(ff_4, v)^2 + \tfrac{15}{28}(iv, v)^2 + \tfrac{9}{14}\left((iv)^1 v\right)^1 - \tfrac{3}{8}\left((f_1 f)^1 v\right)^1$$
$$- \tfrac{3}{7} v(ff_3)^3 = -\tfrac{9}{2} H_{22} - \tfrac{3}{4} H_{31}.$$

Der rechts stehende Theil kann nun in bekannter Weise nach Formen der Gruppe (I) entwickelt werden:

$$H_{22} = \tfrac{5}{4} v H_4 - \tfrac{3}{8} HB - \tfrac{9}{4}(H\Delta)^2,$$

$$H_{31} = \tfrac{5}{6} v H_4 - \tfrac{1}{4} HB - \tfrac{3}{2}(H\Delta)^2,$$

und so folgt nach einigen einfachen Reductionen die gesuchte Relation:

$$(2)\quad f_3^2 - \tfrac{5}{8} ff_{42} + \tfrac{1}{2} f(f\Delta)^4 + v\left(\tfrac{15}{16}(ff_4)^2 + \tfrac{11}{4}(ff_3)^3 + \tfrac{3}{16} Av\right)$$
$$- \tfrac{3}{8} f_2 f_4 = \tfrac{27}{4}(H\Delta)^2 + \tfrac{3}{8} HB + \tfrac{3}{56} i\Delta.$$

Indem man nun zwischen (1) und (2) die Form $(H\Delta)^2$ eliminirt, und die Formen H_4 und i_2 vermittelst $\begin{pmatrix} f & f & v \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} f & f & v \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ durch andere Formen ausdrückt, folgt die gesuchte Syzygante:

$$(ff)^2(vv)^4 + (ff)^4(vv)^2 + \tfrac{1}{3}(ff)^6 v^2 - 2(fv)^2(fv)^4 + \tfrac{4}{3}(fv)^3(fv)^3$$
$$+ 2v\left[\left((ff)^4 v\right)^2 - \left((fv)^4 f\right)^2\right] + \tfrac{2}{3} f\left[\left((fv)^4 v\right)^2 + \left((vv)^2 f\right)^4\right] = 0.$$

Dieselbe gilt zunächst nur, wenn f von der *sechsten* Ordnung ist. Ersetzt man nun aber alle Ueberschiebungen durch symbolische Producte und multiplicirt mit $a_x^{n-6} \cdot b_x^{n-6}$, dann erhält man eine *allgemeine* Syzygante für eine beliebige *höhere* Ordnung von f. Auch lässt sich bemerken, dass durch diesen Process alle Ueberschiebungen völlig ungeändert bleiben, ausgenommen $\left((ff)^4 v\right)^2$. Dieses geht zunächst über in:

$$(ab)^4 (av)^2 b_x^2 v_x^2 - \tfrac{1}{3}(ab)^6 v_x^4$$

und nach Multiplication mit $a_x^{n-6} \cdot b_x^{n-6}$ in

$$\left((ff)^4 v\right)^2 - \frac{n-6}{6(2n-9)}(ff)^6 v.$$

Die allgemein giltige Syzygante wird demnach

$$[ffvv]_6 = (ff)^2(vv)^4 + (ff)^4(vv)^2 - 2(fv)^2(fv)^4 + \tfrac{4}{3}(fv)^3(fv)^3 + v\left[2\left((ff)^4 v\right)^2 - 2\left((fv)^4 f\right)^2 + \frac{n-3}{3(2n-9)}(ff)^6 v\right] + \tfrac{2}{3} f\left[\left((fv)^4 v\right)^2 + \left((vv)^2 f\right)^4\right] = 0.$$

Darin ist f eine Form *sechster* oder höherer Ordnung, dagegen v eine Form *vierter* Ordnung. Auch lässt sich leicht noch die weitere Syzygante $[f\varphi vv']_6 = 0$ hieraus ableiten, die jedoch im Folgenden nicht benützt wird.

Eine *zweite* Syzygante vom Gewichte 6 ergiebt sich aus $\begin{pmatrix} v & f & \Delta \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}_4$ in der Gestalt

$$[fvvv]_6 = (vv)^4(fv)^2 + f\left((vv)^2 v\right)^4 - v\left((vv)^2 f\right)^4 - \frac{3n-10}{n-2}(fv)^4(vv)^2 + 4[(fv)^3(vv)^2]^1 = 0,$$

dieselbe ist jedoch nur dann brauchbar, wenn der letzte Term einen Werth besitzt, der vom übrigen Theile der Syzygante verschieden ist, wie z. B. den Werth Null.

§ 3.

Zusammenstellung und Prüfung der elementaren Syzyganten, welche im Folgenden benützt werden.

Da jede elementare Syzygante als Quelle zahlreicher neuer Syzyganten betrachtet werden muss, so ist es wichtig, dass man sich auf einfache Weise von der Richtigkeit jeder derselben überzeugen kann. Im Folgenden werden nun benützt:

Gewicht 1.

$$(f\varphi\psi) = f(\varphi\psi) - \varphi(f\psi) + \psi(f\varphi) = 0.$$

Gewicht 2.

$$[f\varphi\psi\chi]_2 = 2(f\psi)(\varphi\chi) + f\varphi(\psi\chi)^2 - (f\varphi)^2\psi\chi - f\chi(\varphi\psi)^2 - (f\chi)^2\varphi\psi = 0,$$

$$\{f\varphi\psi\chi\}_2 = (f\varphi)(\psi\chi) - (f\psi)(\varphi\chi) + (\varphi\psi)(f\chi) = 0.$$

(Gilt auch für lineare Formen.)

Gewicht 3.

$$[f\varphi\psi q]_3 = 2(f\varphi)(\psi q)^2 - 2(fq)(\varphi\psi)^2 + 2(\varphi q)(f\psi)^2 - \psi\left((fq)^2\varphi\right)^1 + \psi\left((\varphi q)^2 f\right)^1 + \psi q(f\varphi)^3 = 0,$$

(Gilt auch, wenn ψ eine quadratische Form ist.)

$$\{f\varphi qq'\}_3 = (fq)^2(\varphi q') - (fq')^2(\varphi q) - (f\varphi)^2(qq') + f\big((qq')\varphi\big)^2 = 0.$$

(Gilt auch, wenn f und φ quadratische Formen sind. Ist φ von höherer als der zweiten Ordnung, so kann der letzte Term auch durch

$$f\big((\varphi q')^2 q\big)^1 - f\big((\varphi q)^2 q'\big)^1$$

ersetzt werden.)

Gewicht 4.

$$[f\varphi\psi\chi]_4 = \sum_\lambda \binom{4}{\lambda}(f\varphi)^\lambda(\psi\chi)^{4-\lambda} - \sum_\lambda \binom{4}{\lambda}(f\chi)^\lambda(\psi\varphi)^{4-\lambda} = 0,$$

$$\begin{aligned}[f\varphi\psi q]_4 &= (f\varphi)^4\psi q + 3(f\varphi)^2(\psi q)^2 - (f\psi)^4\varphi q - 3(f\psi)^2(\varphi q)^2\\ &+ 2(fq)(\varphi\psi)^3 + 2\varphi\big((fq)^2\psi\big)^2 + \varphi\big((\psi q)^2 f\big)^2 - 2\psi\big((fq)^2\varphi\big)^2\\ &- \psi\big((\varphi q)^2 f\big)^2 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[f\varphi qq']_4 &= 2(f\varphi)^2(qq')^2 - 2(f\varphi)^3(qq') + (f\varphi)^4 qq' - (fq)^2(\varphi q')^2\\ &- (fq')^2(\varphi q)^2 - 2q\big((\varphi q')^2 f\big)^2 - 2q'\big((fq)^2\varphi\big)^2 + f(\varphi, qq')^4\\ &+ \varphi(f, qq')^4 = 0.\end{aligned}$$

Gewicht 5.

$$\begin{aligned}[f\varphi vv']_5 &= (f\varphi)^4(vv') + 2(f\varphi)^2(vv')^3 + 2(fv)^3(\varphi v')^2 + (fv)(\varphi v')^4\\ &- 2(fv')^3(\varphi v)^2 - (fv')(\varphi v)^4 - \tfrac{2}{3}\varphi\big((vv')^3 f\big)^2\\ &+ \tfrac{1}{3}\varphi\big((fv)^4 v'\big)^1 - \tfrac{1}{3}\varphi\big((fv')^4 v\big)^1 = 0.\end{aligned}$$

(Gilt auch, wenn φ von der vierten Ordnung ist; wäre auch f eine biquadratische Form, so müssten die 3 letzten Terme durch

$$-\varphi\big((vv')^1 f\big)^4 - \tfrac{4}{5}\varphi\big((vv')^3 f\big)^2$$

ersetzt werden.)

$$\begin{aligned}\{f\varphi vv'\}_5 &= 2(f\varphi)^3(vv')^2 + (f\varphi)(vv')^4 + 2(fv')^2(\varphi v)^3 + (fv')^4(\varphi v)\\ &- 2(fv)^3(\varphi v')^2 - (fv)(\varphi v')^4 - \tfrac{1}{2}v'\big((fv)^4\varphi\big)^1\\ &+ \tfrac{1}{2}v'\big((\varphi v)^4 f\big)^1 + v'\big((f\varphi)^3 v\big)^2 + \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2 - 6}v'\big((f\varphi)^4 v\big)^1\\ &+ \frac{\binom{n_1}{2} - 3 + \binom{n_2}{2} - 3}{2\binom{n_1 + n_2}{2} - 7}(f\varphi)^5 vv' = 0.\end{aligned}$$

Gewicht 6.

$$[ffvv]_6 = (ff)^2(vv)^4 + (ff)^4(vv)^2 - 2(fv)^2(fv)^4 + \tfrac{4}{3}(fv)^3(fv)^3$$
$$+ v\left[2\left((ff)^4 v\right)^2 - 2\left((fv)^4 f\right)^2 + \frac{n-3}{3(2n-9)}(ff)^6 v\right]$$
$$+ \tfrac{2}{3} f\left[\left((fv)^4 v\right)^2 + \left((vv)^2 f\right)^4\right] = 0,$$

$$[fvvv]_6 = (vv)^4(fv)^2 + f\left((vv)^2 v\right)^4 - v\left((vv)^2 f\right)^4$$
$$- \frac{3n-10}{n-2}(fv)^4(vv)^2 + 4[(fv)^3(vv)^2]^1 = 0.$$

In allen diesen Syzyganten ist die Ordnung jeder der Formen f, φ, ψ und χ mindestens gleich dem Gewichte der Syzygante, (wenn nicht eine Ausnahme ausdrücklich bemerkt ist), ferner sind *quadratische* Formen durch $q, q' \ldots$ und Formen *vierter* Ordnung durch $v, v' \ldots$ bezeichnet.

Um nun eine elementare Syzygante auf ihre Richtigkeit zu prüfen, nimmt man die darin vorkommenden 4 Formen als *Potenzen linearer Formen* an, setzt also

$$f = (x-a)^{n_1}, \quad \varphi = (x-b)^{n_2}, \quad \psi = (x-c)^{n_3}, \quad \chi = (x-d)^{n_4},$$

bildet daraus alle Ueberschiebungen und nimmt den ersten Coefficienten jeder derselben. Dann ist leicht einzusehen, dass man einfach folgende Substitutionen vornehmen kann:

$(f\varphi)^2$	ersetzt	man	durch	$(a-b)^2$,
$(f\psi)^\mu$	„	„	„	$(a-c)^\mu$,
$\left((fq)^2\varphi\right)^2$	„	„	„	$(a-c)^2(a-b)^2$,
$\left((fv)^4\varphi\right)^1$	„	„	„	$(a-c)^4(a-b)$,

etc. etc.

Alsdann geht beispielsweise die Syzygante $[f\varphi qq']_4$ über in

$$F(a,b,c,d) = 2(a-b)^2(c-d)^2 - 2(a-b)^3(c-d) + (a-b)^4$$
$$- (a-c)^2(b-d)^2 - (a-d)^2(b-c)^2 - 2(b-d)^2(b-a)^2$$
$$- 2(a-c)^2(a-b)^2 + (b-c)^2(b-d)^2$$
$$+ (a-c)^2(a-d)^2 = 0.$$

Da nun die Function F der partiellen Differenzialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b} + \frac{\partial F}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial d} = 0$$

Genüge leistet, so kann sie auch als Function von nur 3 Veränderlichen dargestellt werden. In der That, setzt man

$$a - b = -b', \quad a - c = -c', \quad a - d = -d',$$

dann wird

$$b - c = b' - c', \quad b - d = b' - d', \quad c - d = c' - d'$$

und die neue Function — in b, c, d geschrieben — wird folglich einfach dadurch erhalten, dass man $a = 0$ setzt:

$$2b^2(c-d)^2 + 2b^3(c-d) + b^4 - c^2(b-d)^2 - d^2(b-c)^2 - 2b^2(b-d)^2 - 2b^2c^2 + (b-c)^2(b-d)^2 + c^2d^2 \equiv 0.$$

Der Nachweis, dass diese Function identisch verschwindet, bietet dann keine Schwierigkeit mehr. Jede der angegebenen Syzyganten kann demnach leicht in eine solche identisch verschwindende Function dreier Variabeln übergeführt werden. Auch lässt sich aus jeder solchen Function durch Umkehrung des Verfahrens die entsprechende Syzygante herstellen, woraus hervorgeht, dass das identische Verschwinden der Function auch die *hinreichende* Bedingung für die Richtigkeit der Syzygante ist.

Auch soll darauf hingewiesen werden, dass diese Uebertragungsmethode es möglich macht, elementare Syzyganten aufzufinden. Man bildet eine lineare Function aller zerfallenden Formen mit unbestimmten Coefficienten und überträgt diese auf die angegebene Art in eine Function dreier Veränderlicher. Aus dem identischen Verschwinden der letzteren können dann die Werthe der vorerst unbestimmten Coefficienten gefunden werden. Diese Methode hat den Vorzug, dass sie nur elementare Rechnung erfordert.

Als Ergänzung zu Satz (1) soll auf diesem Wege der Nachweis erbracht werden, dass von den Syzyganten $[f\varphi\psi\chi]_i = 0$, wenn i die Summe zweier Ordnungszahlen z. B. $n_3 + n_4$ überschreitet, nur eine einzige existirt. Ist also $i = n_3 + n_4 + 1$, dann giebt es blos die folgenden zerfallenden Formen:

$$(f\varphi)^{n_3+1+\lambda}(\psi\chi)^{n_4-\lambda}, \quad \psi\left((f\chi)^{n_3-\lambda}\varphi\right)^{n_3+1+\lambda}, \quad \chi\left((f\psi)^{n_3-\mu}\varphi\right)^{n_4+1+\mu},$$
$$\lambda = 0, 1, 2, \ldots n_4,$$
$$\mu = 0, 1, 2, \ldots n_3.$$

Die zugehörigen Functionen dreier Veränderlicher sind nun

$$(-b)^{n_3+1+\lambda}(c-d)^{n_4-\lambda}, \quad (-1)^i d^{n_3-\lambda} b^{n_3+1+\lambda}, \quad (-1)^i c^{n_3-\mu} b^{n_4+1+\mu}.$$

Zwischen denselben giebt es jedoch nur die eine lineare Relation

$$(-b)^{i-1}(c-d) + (-1)^i cb^{i-1} - (-1)^i db^{i-1} = 0,$$

welche der bekannten Syzygante $(k\psi\chi) = 0$ entspricht, sofern für k die Ueberschiebung $(f\varphi)^{i-1}$ substituirt wird. Zu dem gleichen Resultate gelangt man auch, wenn i noch grössere Werthe als $n_3 + n_4 + 1$ annimmt.

Ausser den angegebenen 12 elementaren Syzyganten wird nun auch noch die Relation (5) pag. 204 der Binären Formen von Clebsch einmal benützt werden. Die Gesammtzahl der elementaren Syzyganten

ist demnach gleich 13. Indessen muss hiezu bemerkt werden, dass von denselben noch zwei entbehrt werden könnten. Die Syzyganten vom Gewichte 2 lassen sich nämlich beide durch solche vom Gewichte 1 ersetzen, wie man erkennt, wenn man in der Relation $(f\varphi\chi) = 0$ statt f die Ueberschiebung $(f\psi)$ substituirt:

$$2\big((f\psi)\,\varphi\chi\big) \equiv [f\varphi\psi\chi]_2 .$$

Auch ist $\{f\varphi\psi\chi\}_2 = 0$, wie in § 1 schon bemerkt wurde, nur eine Folge der Syzygante $[f\varphi\psi\chi]_2 = 0$. Daher sind blos 11 von einander unabhängige Syzyganten in Rechnung zu ziehen.

§ 4.

Reduction einiger Ueberschiebungen auf die Grundformen der binären Form sechster Ordnung.

Die Grundformen, welche bei Aufstellung der fundamentalen Syzyganten (Math. Annalen Band 34, pag. 306) benützt wurden, sollen im Folgenden beibehalten werden; jedoch wird es sich hier vortheilhaft erweisen, wenn ein und dieselbe Grundform auf mehrere verschiedene Arten als Ueberschiebung dargestellt werden kann. In folgender Tabelle ist dieser Punkt entsprechend berücksichtigt worden.

Grad 1: f;

„ 2: $H = (ff)^2$; $i = (ff)^4$; $A = (ff)^6$;

„ 3: $T = (fH)$; $q = (fi)$; $p = (fi)^2$; $l = (fi)^4$;

„ 4: $r = (Hi) = (pf)$; $s = (Hi)^3 = -\frac{1}{2}(fl)$;

$\Delta = (ii)^2 = \frac{1}{2}(fl)^2 - \frac{1}{6}Ai$; $B = (ii)^4$;

„ 5: $t = (Hl) = 2(pi) - \frac{1}{3}Aq = 2(\Delta f) - \frac{1}{3}Aq$;

$u = (il)$; $m = (il)^2$;

„ 6: $w = (pl)$; $v = (i\Delta) = \frac{1}{2}(mf) - 2w$;

$C = (i\Delta)^4 = \frac{1}{2}(ll)^2 - \frac{1}{6}AB$;

„ 7: $\pi = (im) = (l\Delta)$; $n = (im)^2 = (\Delta l)^2 + \frac{1}{3}Bl$;

„ 8: $\nu = (lm)$;

„ 9: $\varrho = (in) = (m\Delta)$;

„ 10: $\mu = (nl)$; $D = (mm)^2 = (nl)^2$;

„ 12: $\lambda = (mn)$;

„ 15: $R = (l\lambda)^2 = (m\mu)^2 = (n\nu)^2$.

Ausser den a. a. O. schon gebrauchten Ueberschiebungen werden nunmehr noch die folgenden nothwendig werden.

1. Ueberschiebungen über f.

Aus der Relation

$$(fl)^2 = 2\Delta + \tfrac{1}{3} Ai$$

entspringen die folgenden zusammengesetzten Ueberschiebungen:

$$(fl^2)^3 = -2\pi + \tfrac{1}{3} Au,$$

$$(fl^2)^4 = 2n - \tfrac{2}{3} Bl + \tfrac{1}{3} Am,$$

$$\big((fl)^2 f\big)^2 = il - \tfrac{1}{3} fB + \tfrac{1}{3} Ap,$$

$$\big((fl)^2 i\big)^2 = \tfrac{1}{3} A\Delta + \tfrac{1}{3} Bi,$$

$$\big((fl)^2 \Delta\big)^2 = \tfrac{2}{3} Ci - \tfrac{1}{3} B\Delta + \tfrac{1}{18} ABi.$$

Durch die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} f & f & l \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_2, \quad \begin{pmatrix} i & l & f \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}_2, \quad \begin{pmatrix} l & m & f \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_3 \text{ und } \begin{pmatrix} f & i & n \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_3$$

erhält man ferner

$$(fs) = \tfrac{1}{4} Hl - \tfrac{1}{6} f\Delta - \tfrac{1}{36} fiA,$$

$$(fu) = i\Delta - \tfrac{1}{2} pl - \tfrac{1}{4} fm + \tfrac{1}{6} Ai^2,$$

$$(fv)^2 = 2\varrho + \tfrac{1}{3} Bu - \tfrac{2}{3} A\pi,$$

$$(f\varrho)^2 = -\tfrac{1}{6} Bv - \tfrac{1}{4} l\pi - \tfrac{1}{4} mu.$$

2. Ueberschiebungen über H und i.

Da der Werth von $(HH)^2$ aus Früherem schon bekannt ist, so ist nur

$$(HH)^4 = \tfrac{2}{21} fl + \tfrac{25}{294} i^2 - \tfrac{1}{15} AH$$

und

$$(HH)^6 = \tfrac{1}{42} Ai + \tfrac{10}{49} \Delta$$

zuzufügen, wie aus den Substitutionen

$$\begin{pmatrix} f & f & H \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}_6 \text{ und } \begin{pmatrix} f & f & H \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}_8$$

abgeleitet werden kann.

Aus

$$\begin{pmatrix} f & f & p \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f & f & \Delta \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f & f & \Delta \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f & f & \Delta \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} f & f & \Delta \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

folgen die Ueberschiebungen:

$$(Hp)^2 = -\frac{1}{10} Hl - \frac{5}{42} ip + \frac{1}{18} fiA,$$

$$(H\Delta) = is + \frac{1}{6} fu \quad \text{(reducirt mittelst der Syzygante } (fil) = 0),$$

$$(H\Delta)^2 = \frac{3}{14} i\Delta - \frac{1}{6} pl + \frac{1}{18} Ai^2,$$

$$(H\Delta)^3 = \frac{1}{7} v + \frac{1}{2} w;$$

$$(H\Delta)^4 = \frac{1}{4} l^2 - \frac{1}{30} A\Delta - \frac{5}{42} Bi.$$

Endlich erhält man noch die Functionaldeterminanten

$$(Hm) = ls + \frac{1}{6} At + q \cdot \left(\frac{A^2}{18} - \frac{B}{3}\right),$$

$$(Hn) = ms + lw + \frac{1}{3} lv + \frac{1}{6} i\pi$$

durch die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} f & f & m \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} f & f & n \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

unter gleichzeitiger Benützung der Syzyganten vom Grade 9 und der Ordnung 8.

Von den Ueberschiebungen über i sind anzuführen:

$$(pi) = \frac{1}{2} t + \frac{1}{6} Aq \quad \text{aus} \quad \begin{pmatrix} i & f & i \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(pi)^2 = \frac{1}{6} fB - \frac{1}{10} il \quad \text{„} \quad \begin{pmatrix} i & f & i \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(pi)^3 = -\frac{1}{5} u \quad \text{„} \quad \begin{pmatrix} i & f & i \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(pi)^4 = \frac{2}{5} m \quad \text{„} \quad \begin{pmatrix} i & f & i \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(i\pi)^2 = -\frac{1}{2} \varrho \quad \text{„} \quad \begin{pmatrix} i & m & i \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(iv)^2 = \mu \quad \text{„} \quad \begin{pmatrix} l & m & i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_3,$$

$$(i\mu)^2 = \lambda + \frac{1}{2} Bv \quad \text{„} \quad \begin{pmatrix} n & l & i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_3,$$

$$(is)^2 = -\frac{1}{3} v - \frac{1}{2} w \quad \text{„} \quad \begin{pmatrix} f & l & i \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Ueberschiebungen über p, l, m und n.

Durch die Substitutionen

$$\binom{f\ i\ p}{3\ 2\ 1}_4,\quad \binom{f\ i\ l}{0\ 2\ 2},\quad \binom{f\ \Delta\ i}{1\ 2\ 2}_3,\quad \binom{f\ i\ m}{2\ 1\ 1}_3,\quad \binom{i\ f\ m}{0\ 2\ 2}\quad \text{und}\quad \binom{i\ f\ n}{0\ 2\ 2}$$

ergeben sich folgende Beziehungen:

$$(pp)^2 = \tfrac{1}{6} fm - \tfrac{1}{6} i\Delta - \tfrac{1}{5} lp,$$

$$(pl)^2 = \tfrac{1}{3} A\Delta + \tfrac{1}{3} Bi - \tfrac{1}{10} l^2,$$

$$(p\Delta) = -\tfrac{1}{6} Bq - \tfrac{1}{6} iu,$$

$$(pm) = \tfrac{2}{3} Bs - \tfrac{1}{3} Av + \tfrac{1}{6} lu,$$

$$(pm)^2 = \tfrac{1}{3} B\Delta - \tfrac{1}{3} Ci + \tfrac{2}{5} lm;$$

$$(pn)^2 = \tfrac{1}{2} m^2 + \tfrac{2}{5} ln - \tfrac{1}{3} C\Delta - \tfrac{1}{6} B^2 i - \tfrac{2}{9} ACi.$$

Mit Hilfe des Ausdrucks für $(pm)^2$ kann ferner durch die Substitution $\binom{i\ m\ p}{1\ 1\ 2}_3$ die Reductionsformel

$$(pn) = \tfrac{1}{3} Bv + \tfrac{2}{3} Bw - \tfrac{1}{3} um$$

erhalten werden.

Ferner reducirt man die Ueberschiebungen über l mittelst der Substitutionen

$$\binom{i\ l\ \Delta}{0\ 1\ 2},\ \binom{i\ l\ l}{0\ 2\ 1},\ \binom{p\ l\ l}{0\ 2\ 1},\ \binom{H\ l\ l}{0\ 2\ 1},\ \binom{\Delta\ l\ l}{0\ 2\ 1},\ \binom{f\ l\ l}{0\ 2\ 1},\ \binom{i\ n\ l}{0\ 2\ 1},$$

nämlich

$$(lv)^2 = \varrho - \tfrac{1}{6} Bu;\quad (lu)^2 = -\tfrac{v}{2};\quad (lw)^2 = \tfrac{1}{6} Bu - \tfrac{1}{6} A\pi;$$

$$(lt)^2 = \tfrac{1}{4} Aw + \tfrac{1}{2} Bs + \tfrac{5}{14} lu;\quad (l\pi)^2 = -\tfrac{1}{2} u;$$

$$(ls)^2 = \tfrac{2}{3} \pi - \tfrac{1}{9} Au;\quad (l\varrho)^2 = \lambda + \tfrac{1}{4} Bv.$$

Bezüglich der Invarianten, welche durch zweite Ueberschiebung von l, m und n gebildet werden können, sei auf Clebsch's binäre Formen verwiesen.

Von den Ueberschiebungen über m kommen vor:

$$(m\pi)^2 = -\tfrac{1}{2}\lambda;\quad (ms)^2 = -\tfrac{1}{3}\varrho - \tfrac{1}{6} Bu + \tfrac{1}{3} A\pi;$$

$$(m\Delta)^2 = \tfrac{1}{6} Bm + \tfrac{1}{3} Cl;\quad (mu)^2 = \mu,$$

die aus

$$\begin{pmatrix}\Delta & l & m\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}f & l & m\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}i & i & m\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\quad \text{und}\quad \begin{pmatrix}i & l & m\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

erhalten werden.

Endlich sind noch zu erwähnen:

$(n\Delta) = \frac{1}{2} B\pi + \frac{1}{3} Cu$ aus $\begin{pmatrix}i & i & n\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ und

$(nu)^2 = -\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} Bv$ „ $\begin{pmatrix}i & l & n\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

§ 5.

Entwicklung der Grundsyzyganten für die binäre Form sechster Ordnung.

Der Weg, der zur Aufstellung aller Grundsyzyganten führt, ist nun folgender. Man bildet alle Producte der Grundformen zu zweien wie z. B. fr, T^2, $H\Delta$, HB etc. etc. und zerlegt sodann jedes Product mit Hilfe der Tabelle des § 4 in Ueberschiebungen, so dass sich ergiebt

$r = f(Hi)$; $T^2 = (fH)(fH)$; $H\Delta = (ff)^2(ii)^2$; $HB = (ff)^2(ii)^4$

etc. etc.

Zu jeder derartigen Zerlegung von der Art $(f\varphi)^\lambda(\psi\chi)^\mu$ können nun nach § 1 die zugehörigen *elementaren* Syzyganten entwickelt werden, welche dieses Product enthalten, wobei auch der Fall eintreten kann, dass solche Syzyganten überhaupt nicht existiren (Satz (1)). Man erhält so zu dem Producte

$f \cdot r$	die Syzygante	(fHi)	$= 0$,
T^2	„ „	$[ffHH]_2$	$= 0$ oder $(fHT) = 0$,
$H\Delta$	„ „	$[ffii]_4$	$= 0$,
HB	„ „	$[ffii]_6$	$= 0$ etc. etc.

In folgender Tabelle sind nun sämmtliche Grundsyzyganten in dieser Weise symbolisch dargestellt und bis zum Grade 9 auch ausgewerthet. Von da ab ist nur derjenige Theil der Syzygante beigesetzt worden, aus welchem die *Irreducibilität* derselben ersichtlich ist, doch bietet die vollständige Ausrechnung keinerlei Schwierigkeiten, vielmehr lässt sich in vielen Fällen das Resultat unmittelbar hinschreiben.

Ordnung.

Grad 5.

16. $(fHi) = fr - Hq + iT = 0.$

Grad 6.

24. $[ffHH]_2 = 2T^2 + H^3 - \frac{1}{2} f^2 Hi - \frac{1}{3} f^3 p + \frac{1}{18} f^4 A = 0;$

20. $[ffHi]_2 = 2Tq + H^2 i - fHp - \frac{1}{3} f^2 i^2 + \frac{1}{6} f^3 l = 0;$

Ordnung.

18. $(fHp) = Hr + pT + \frac{1}{6} fiq - \frac{1}{3} f^2 s = 0;$

16. $[ffii]_2 = 2q^2 + Hi^2 - 2fip + f^2\Delta = 0;$

14. $(fHl) = Tl + 2Hs + ft = 0;$

14. $(fip) = qp + ir - \frac{1}{2} ft - \frac{1}{6} fAq = 0;$

12. $[ffii]_4 = 6H\Delta - 6p^2 + i^3 - 2fil + f^2 B = 0;$

10. $(fil) = ql + 2is + fu = 0;$

8. $[ffii]_6 = HB + fm - 2lp - i\Delta - \frac{1}{3} Ai^2 = 0.$

Grad 7.

22. $[fHHi]_2 = 2Tr - H^2 p + \frac{1}{6} fHi^2 + \frac{1}{6} f^2 Hl + \frac{1}{3} f^2 ip - \frac{1}{18} f^3 iA = 0;$

18. $[flHf]_2 = 4Ts - H^2 l + 2fH\Delta + \frac{1}{3} fHiA - \frac{1}{3} f^2 Ap - \frac{1}{2} f^2 il + \frac{1}{3} f^3 B = 0;$

18. $[fHii]_2 = 2qr - Hip + fH\Delta + \frac{1}{3} fi^3 - \frac{1}{6} f^2 il = 0;$

16. $(fH\Delta) = T\Delta + \frac{1}{2} Ht + \frac{1}{6} HAq + fis + \frac{1}{6} f^2 u = 0;$

16. $(Hip) = pr - \frac{1}{2} Ht - \frac{1}{6} HAq + \frac{1}{6} i^2 q - \frac{1}{3} fis = 0;$

14. $[Hiif]_4 = 4qs - Hil + fHB + fi\Delta - flp = 0;$

12. $\{fHii\}_5 = TB + lr + 2ps + \frac{1}{2} it - \frac{1}{6} Aiq = 0;$

12. $(fi\Delta) = q\Delta + \frac{1}{2} it + fv + \frac{1}{6} Aiq = 0;$

12. $(fpl) = fw + 2sp - lr = 0;$

12. $(Hil) = lr - it + Hu = 0;$

10. $[ffil]_4 = 6Hm - 12p\Delta - 4Aip - 4i^2 l - fl^2 + 2fA\Delta + 4fiB = 0;$

6. $[fiii]_6 = Bp + fC - \frac{1}{2} im - 2l\Delta = 0.$

Grad 8.

20. $[HHii]_2 = 2r^2 + H^2\Delta + \frac{1}{6} Hi^3 - \frac{1}{3} fHil - \frac{1}{3} fi^2 p + \frac{1}{18} f^2 i^2 A = 0;$

Ordnung.

20. $\{fHpi\}_2 = \frac{1}{2} Tt + r^2 + \frac{1}{6} AqT + \frac{1}{3} fqs - \frac{1}{6} iq^2 = 0;$

16. $[fHil]_2 = 2qt - 2Hi\Delta - \frac{1}{3} Hi^2 A + fHm + \frac{1}{3} fi^2 l - \frac{1}{6} f^2 l^2 = 0;$

16. $[plff]_2 = 4rs + Hpl - fHm + \frac{1}{3} fiAp + \frac{1}{2} fi^2 l - \frac{1}{3} f^2 iB = 0;$

16. $\{fHil\}_2 = Tu - qt - 2rs = 0;$

14. $(Hi\Delta) = r\Delta + Hv - \frac{1}{6} fiu - i^2 s = 0;$

14. $(fp\Delta) = \frac{1}{2} pt - r\Delta + \frac{1}{6} Apq - \frac{1}{6} fBq - \frac{1}{6} fiu = 0;$

14. $(Hpl) = Hw - pt + \frac{1}{3} fls - \frac{1}{6} iql = 0;$

14. $(fHm) = Tm + 2Hv + 2Hw + fls + \frac{1}{6} fAt + fq\left(\frac{A^2}{18} - \frac{B}{3}\right) = 0;$

12. $[fiil]_2 = 2qu - 2i^2\Delta + ilp - fl\Delta + fim - \frac{1}{3} Ai^3 = 0;$

12. $[ffll]_2 = 8s^2 + Hl^2 + 2fBp - fim - \frac{2}{3} fAil + \frac{1}{3} f^2 AB = 0;$

10. $(fim) = qm + 2iv + 2iw + f\pi = 0;$

10. $(ilp) = \frac{1}{2} lt - iw + pu + \frac{1}{6} Alq = 0;$

10. $\{pfii\}_5 + \frac{1}{10} (fim) - \frac{2}{5} (ilp) + \frac{3}{5} (fl\Delta) = Br - lt + \frac{1}{2} qm - \frac{1}{2} f\pi - \frac{1}{3} Alq = 0;$

10. $(fl\Delta) = 2s\Delta - f\pi - \frac{1}{2} lt - \frac{1}{6} Alq = 0;$

8. $\frac{1}{2} [ffll]_4 - \frac{1}{3} A[ffii]_6 = 2CH - 4\Delta^2 + 2fn + Ai\Delta + \frac{3}{2} il^2 = 0;$

8. $[fiil]_4 = 3fn + 3pm - 6\Delta^2 - flB - 2Ai\Delta - Bi^2 = 0.$

Grad 9.

18. $[fiH\Delta]_2 = 2Tv + Hp\Delta - \frac{1}{2} Hi^2 l + \frac{1}{3} fi^2 \Delta - \frac{1}{6} fipl + \frac{1}{6} fiHB - \frac{1}{18} fAi^3 - \frac{1}{6} f^2 l\Delta = 0;$

Ordnung.

18. $\{fHpl\}_2 = Tw + rt + \frac{1}{3} iqs - \frac{2}{3} fs^2 = 0;$

18. $\{f\Delta iH\}_2 = \frac{1}{2} rt - Tv + iqs + \frac{1}{6} fqu + \frac{1}{6} Aqr = 0;$

14. $[fii\Delta]_2 = 2qv + ip\Delta - f\Delta^2 - \frac{1}{2} i^3 l + \frac{1}{3} fi^2 B = 0;$

14. $[fpil]_2 = 2qw - 2ip\Delta + \frac{1}{6} i^3 l - \frac{1}{3} Ai^2 p + fpm + \frac{1}{6} fil^2 - \frac{1}{6} f^2 lB = 0;$

14. $[Hiil]_2 = 2ru + Him - Hl\Delta - \frac{1}{3} Ai^2 p - \frac{5}{6} i^3 l + \frac{1}{6} fil^2 + \frac{1}{3} fi^2 B = 0;$

14. $\{flip\}_2 = st + ru + qw + \frac{1}{3} Aqs = 0;$

12. $\{fHi\Delta\}_5 = TC + \frac{1}{2} rm + \frac{1}{2} \Delta t + ils + \frac{1}{6} iqB - \frac{1}{3} fBs - \frac{1}{4} ql^2 = 0;$

12. $(pi\Delta) = pv + \frac{1}{2} \Delta t + \frac{1}{6} iqB + \frac{1}{6} i^2 u + \frac{1}{6} Aq\Delta = 0;$

12. $(fpm) = 2pw + 2pv - mr + \frac{2}{3} fBs - \frac{1}{3} fAv + \frac{1}{6} flu = 0;$

12. $(Him) = rm + H\pi - ils - \frac{1}{6} iAt + \frac{1}{3} iqB - \frac{1}{18} A^2 iq = 0;$

12. $(Hl\Delta) = \Delta t + H\pi - \frac{1}{6} flu - ils = 0;$

10. $[flli]_2 = 4su + 2il\Delta - pl^2 + flm - 2fiC - \frac{1}{3} fiAB + \frac{1}{3} Ai^2 l = 0;$

10. $[ff\Delta l]_4 + l[ffii]_6 - \frac{1}{2} [flli]_2 = 3Hn - 7il\Delta - \frac{3}{2} pl^2 - Ap\Delta + fB\Delta + 2fiC + flm + \frac{1}{3} fABi - Ai^2 l = 0;$

8. $[fill]_3 = 4qC + 4sm + 4lv + 2lw + \frac{2}{3} Aiu + \frac{2}{3} ABq = 0;$

8. $(fml) = 2sm - 2lw - 2lv - fv = 0;$

8. $(il\Delta) = \Delta u - lv + i\pi = 0;$

8. $[fii\Delta]_5 - \frac{2}{3} (il\Delta) = \frac{1}{2} Bt + qC + 2lv - \frac{1}{2} i\pi + \frac{1}{6} ABq = 0;$

6. $\frac{1}{4} [fill]_4 - \frac{1}{6} A[fiii]_6 = pC - \Delta m + \frac{1}{2} in - \frac{1}{2} Bil + \frac{1}{6} fB^2 = 0.$

Ordnung.

Grad 10.

16. $\{fHl\Delta\}_2 \equiv T\pi; \quad [Hii\Delta]_2 \equiv 2rv;$

$\{fiHm\}_2 \equiv 2rw + 2rv - T\pi; \quad [ff\Delta\Delta]_2 \equiv \frac{1}{2}\, t^2;$

14. $(fHn) \equiv Tn;$

12. $[fli\Delta]_2 \equiv 2q\pi; \quad [f\Delta li]_2 \equiv 4sv; \quad [fllp]_2 \equiv 4sw;$

$2\{fi\Delta l\}_2 = tu - 4sv - 2q\pi + \frac{1}{3}\, Aqu = 0;$

10. $(fin) \equiv qn + f\varrho; \quad (imp) \equiv p\pi + \frac{1}{2}\, tm;$

$(l\Delta p) \equiv w\Delta + p\pi; \quad (f\Delta m) \equiv 2v\Delta + 2w\Delta - \frac{1}{2}\, tm - f\varrho;$

$(Hlm) \equiv tm + Hv;$

$[Hii\Delta]_5 = Cr - w\Delta + \frac{1}{6}\, Aiv - \frac{2}{3}\, Bis - \frac{1}{6}\, fuB + \frac{1}{12}\, ilu = 0;$

8. $[iill]_2 \equiv 2u^2;$

$2[ifim]_4 - [iill]_2 - \frac{1}{2}\, B[ffii]_6 - l[fiii]_6 = 6pn - 2u^2$

$- HB^2 - 2A\Delta^2 - 3iB\Delta = 0;$

6. $(ilm) = um - l\pi + iv = 0;$

$[siii]_6{}^*) = Cs - \frac{1}{2}\, Bw - \frac{1}{4}\, iv - \frac{1}{2}\, l\pi = 0;$

4. $[iill]_4 \equiv 4C\Delta - 4ln - 2m^2.$

Grad 11.

14. $\{fHlm\}_2 \equiv Tv - 2tv - 2tw;$

$\{Hil\Delta\}_2 = r\pi - tv + uis + \frac{1}{6}\, fu^2 = 0;$

$\{lpf\Delta\}_2 \equiv \frac{1}{2}\, wt + r\pi; \quad [\Delta if\Delta]_2 \equiv tv;$

12. $(Hm\Delta) \equiv H\varrho; \quad (Hin) \equiv nr + H\varrho;$

10. $\{film\}_2 = qv + 2s\pi - 2uv - 2uw = 0;$

$[film]_2 \equiv -4s\pi; \quad [iil\Delta]_2 \equiv 2uv; \quad [ipll]_2 \equiv 2uw;$

8. $[film]_3 \equiv 4\Delta\pi + 4mv + 4mw;$

$[fiml]_3 \equiv 4sn + 4mv + 2mw; \quad [f\Delta i\Delta]_5 \equiv tC + mv + \Delta\pi;$

$(im\Delta) = i\varrho + \Delta\pi - mv = 0; \quad (fnl) \equiv f\mu + 2ns;$

$(plm) \equiv pv + mw;$

6. $[f\Delta ll]_4 \equiv 2\Delta n - fD;$

*) Auch aus $([fiii]_6\, l)^1 + \frac{1}{3}\, (ilm)$ zu erhalten.

Ordnung.

Grad 12.

16. $\{fHin\}_2 \equiv T\varrho;$

12. $\{Hlim\}_2 \equiv t\pi - r\dot{v}; \quad \{pflm\}_2 \equiv rv + 2vw + 2w^2;$

$\{fim\Delta\}_2 \equiv q\varrho + 2v^2 + 2vw - \frac{1}{2}t\pi;$

$\{pli\Delta\}_2 \equiv wv - \frac{1}{2}t\pi; \quad [ffmm]_2 \equiv 8(v+w)^2;$

$[ii\Delta\Delta]_2 \equiv 2v^2;$

10. $(fn\Delta) \equiv \frac{1}{2}tn; \quad (pin) \equiv p\varrho + \frac{1}{2}tn;$

$(Hnl) \equiv H\mu - tn;$

8. $[iilm]_2 \equiv 2u\pi; \quad [fllm]_2 \equiv -4sv; \quad [ffmm]_4 \equiv 2HD;$ *)

6. $(m\Delta l) = \Delta v + l\varrho - m\pi = 0; \quad (iln) = un - \varrho l - i\mu = 0;$

$[i\Delta ll]_3 \equiv 4Cv - 2un - 2l\varrho - 2m\pi;$

$\{lflm\}_3 \equiv -4Cw - 4Cv + 2l\varrho - 2\Delta v;$

4. $[iilm]_4 = -4mn + 2iD + 2\Delta(lm)^2 - \frac{2}{3}Cl^2 = 0.$

Grad 13.

14. $\{fHnl\}_2 \equiv T\mu; \quad \{Him\Delta\}_2 \equiv r\varrho;$

12. $[fHnl]_3 \equiv 2DT;$

10. $\{finl\}_2 \equiv q\mu - 2\varrho s;$

$\{flm\Delta\}_2 = -2\varrho s + 2v\pi + 2w\pi - \frac{1}{2}vt - \frac{1}{6}Aqv = 0;$

$\{pilm\}_2 \equiv \frac{1}{2}tv - w\pi; \quad [ii\Delta m]_2 \equiv 2v\pi;$

$[fimm]_2 \equiv -4v\pi - 4w\pi;$

---

*) Addirt man zu dieser Syzygante

$$\frac{2}{3}i[iill]_4 - \frac{8}{9}A[ifim]_4 + \frac{2}{3}B[fiil]_4 - \frac{2}{9}AB[ffii]_6 - \left(\frac{2}{3}m + \frac{4}{9}Al\right)[fiii]_6,$$

so nimmt sie die Form an

$$2DH + \frac{8}{3}fBn - \frac{8}{3}Apn - \frac{8}{3}iln + \frac{4}{3}i\Delta\left(2C + \frac{1}{3}AB\right) + \frac{2}{3}\Delta^2(A^2 - 6B) + \frac{2}{3}l\Delta(Al - 4m) - \frac{1}{2}l^4 = 0.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich in 2 Coefficienten von demjenigen, den Herr v. Gall a. a. O. pag. 70 angegeben hat.

Ordnung.

8. $[fimm]_3 \equiv 2qD + 4vn + 4wn; \quad (pnl) \equiv p\mu - nw;$

$(i\Delta n) \equiv nv - \Delta\varrho; \quad (fnm) \equiv 2wn + 2vn - f\lambda;$

$[finl]_3 \equiv 2qD + 4nv + 2nw;$

6. $[illm]_2 \equiv 2uv;$

$[fimm]_4{}^*) = 2pD - 2lm^2 - nl^2 + f(nm)^2 - \frac{1}{3}Bin + Cim$

$+ \frac{4}{9}ACil + \frac{1}{3}iB^2l - \frac{2}{3}An\Delta - \frac{4}{3}Bm\Delta = 0;$

4. $\{liml\}_3 = mv - l\mu - \left(2C + \frac{1}{3}AB\right)\pi + (lm)^2 u = 0.$

Grad 14.

12. $\{Hinl\}_2 \equiv r\mu + \varrho t; \quad \{Hlm\Delta\}_2 \equiv t\varrho;$

10. $[Himm]_3 \equiv 2Dr; \quad (Hmn) \equiv H\lambda;$

8. $[flln]_2 \equiv 4s\mu; \quad \{ilm\Delta\}_2 = u\varrho - \pi^2 + vv = 0;$

$[il\Delta m]_2 \equiv 2vv; \quad [pllm]_2 \equiv 2wv; \quad [iimm]_2 \equiv 2\pi^2;$

6. $\{mfml\}_3 \equiv -2sD - 2\varrho m; \quad (\Delta nl) \equiv n\pi + \Delta\mu;$

$(min) = m\varrho - i\lambda - n\pi = 0; \quad \{lfln\}_3 \equiv 2\Delta\mu + 2Ds;$

4. $[iimm]_4 \equiv -2n^2 + 2\Delta D.$

Grad 15.

14. $\{fHmn\}_2 \equiv T\lambda;$

10. $\{fimn\}_2 \equiv q\lambda + 2\varrho v + 2\varrho w; \quad \{pinl\}_2 \equiv \frac{1}{2}t\mu + \varrho w;$

$\{plm\Delta\}_2 \equiv \varrho w; \quad [ii\Delta n]_2 \equiv 2v\varrho;$

8. $\{mHml\}_3 \equiv Dt; \quad (pmn) \equiv p\lambda;$

6. $[ilmm]_2 \equiv 2\pi v; \quad [inll]_2 \equiv 2u\mu;$

4. $\{liln\}_3 = m\mu + (ll)^2\varrho - Du - l\lambda - \frac{1}{2}Blv = 0;$

$(nlm) = nv + l\lambda + m\mu = 0;$

$\{miml\}_3 = Du + nv - m\mu - (lm)^2\pi = 0.$

*) Der letzte Coefficient dieser Syzygante, wie sie von Herrn v. Gall pag. 71 angegeben ist, muss darnach in 4 abgeändert werden.

Grad 16.

12. $\{Himn\}_2 \equiv r\lambda;$

8. $\{flnm\}_2 \equiv 2s\lambda + 2v\mu + 2w\mu; \quad \{i\Delta nl\}_2 \equiv v\mu + \varrho\pi;$

$[pnll]_2 \equiv 2w\mu; \quad [iimm]_2 \equiv 2\varrho\pi;$

6. $(nm\Delta) \equiv n\varrho - \Delta\lambda; \quad \{mpml\}_3 \equiv Dw;$

$[i\Delta mm]_3 \equiv 2Dv - 2n\varrho; \quad \{flmn\}_3 \equiv fR - 2\Delta\lambda;$

4. $[llmm]_2 \equiv 2\nu^2;$

Grad 17.

10. $\{pimn\}_2 \equiv \frac{1}{2}t\lambda;$

8. $\{Hlmn\}_3 \equiv HR;$

6. $\{ilmn\}_2 = u\lambda + \pi\mu + \varrho\nu = 0;$

$[ln\Delta l]_2 \equiv 2\pi\mu; \quad [limn]_2 \equiv 2\varrho\nu;$

4. $\{ilnm\}_3 \equiv m\lambda + n\mu - iR;$

$\{nilm\}_3 \equiv n\mu + \pi D;$

$\{linm\}_3 \equiv D\pi + m\lambda;$

Grad 18.

12. $[fH\nu n]_3$*) $\equiv 2TR;$

8. $[fi\nu n]_3 = 2qR - \frac{1}{3}\mu(2Av - 8Bs - 5ln) + \frac{2}{3}\varrho$

$(6\varrho + Bu - 2A\pi) + \frac{1}{3}\nu(4Bv + 4Bw - 2um) = 0;$

$\{i\Delta mn\}_2 \equiv v\lambda - \varrho^2; \quad \{plmn\}_2 \equiv w\lambda;$

$[iinn]_2 \equiv 2\varrho^2;$

6. $\{plmn\}_3 \equiv pR;$

4. $[llmn]_2 \equiv 2\nu\mu;$

2. $\{llmn\}_3 \equiv lR - Dv - 2C\lambda;$

Grad 19.

10. $[Hivn]_3 \equiv 2rR;$

6. $\{slmn\}_3 \equiv sR - \frac{2}{3}\lambda\pi + \frac{1}{3}\varrho\mu; \quad \{l\Delta mn\}_2 \equiv \lambda\pi + \varrho\mu;$

$[innl]_2 \equiv 2\varrho\mu;$

4. $\{\Delta lmn\}_3 \equiv \Delta R - \lambda n; \quad \{niln\}_3 \equiv D\varrho - \lambda n;$

*) Die hierin auftretenden Ueberschiebungen über ν sind mittelst der Beziehung $((lm)^1\varphi)^2 = ((\varphi m)^2 l)^1 - ((\varphi l)^2 m)^1$ leicht zu bestimmen. Dasselbe gilt von den Ueberschiebungen über λ und μ.

Grad 20.

8. $[\Delta f v n]_3 \equiv tR;$

4. $[nnll]_2 \equiv 2\mu^2;\quad [lmmn]_2 \equiv 2\nu\lambda;$
$\{ulmn\}_3 \equiv uR + \lambda\nu - \mu^2;$

2. $\{mlmn\}_3 \equiv mR - \mu D;$

Grad 21.

6. $[i\Delta vn]_3 \equiv 2vR - 2\varrho\lambda;\quad \{vpnl\}_3 \equiv Rw;$
$[imnn]_2 \equiv 2\varrho\lambda;$

Grad 22.

4. $\{vinm\}_3 \equiv R\pi + \lambda\mu;\quad [nmln]_2 \equiv 2\mu\lambda;$

2. $\{nlmn\}_3 \equiv nR - \lambda D;$

Grad 23.

2. $\{vlmn\}_3 \equiv vR;$

Grad 24.

4. $\{\varrho lmn\}_3 \equiv \varrho R - \lambda^2;\quad [mmnn]_2 \equiv 2\lambda^2;$

Grad 25.

2. $\{\mu lmn\}_3 \equiv \mu R;$

Grad 27.

2. $\{\lambda lmn\}_3 \equiv \lambda R;$

Grad 30.

0. $[lmn\ lmn]_6 \equiv 2R^2;$

Hierin bedeutet das zuletzt gebrauchte Symbol:

$$[qq_1fq_2q_3\varphi]_6 = 2\left((qq_1)^1f\right)^2\cdot\left((q_2q_3)^1\varphi\right)^2 - \begin{vmatrix} (q\,q_2)^2 & (q\,q_3)^2 & (q\,\varphi)^2 \\ (q_1q_2)^2 & (q_1q_3)^2 & (q_1\varphi)^2 \\ (fq_2)^2 & (fq_3)^2 & (f\varphi)^2 \end{vmatrix} = 0;$$

§ 6.

Uebersicht über die Verwendbarkeit der elementaren Syzyganten.

Um nachzuweisen, wie ungleich die elementaren Syzyganten im vorstehenden Systeme Verwendung gefunden haben, dazu mögen folgende Angaben dienen. Es sind benützt worden:

49	Syzyganten	$(f\varphi\psi)$	$= 0,$
53	„	$[f\varphi\psi\chi]_2$	$= 0,$
37	„	$\{f\varphi\psi\chi\}_2$	$= 0,$
13	„	$[f\varphi\psi q]_3$	$= 0,$
28	„	$\{f\varphi qq'\}_3$	$= 0,$
2	„	$[f\varphi\psi\chi]_4$	$= 0,$
4	„	$[f\varphi\psi q]_4$	$= 0,$
8	„	$[f\varphi qq']_4$	$= 0,$
3	„	$[f\varphi vv']_5$	$= 0,$
3	„	$\{f\varphi vv'\}_5$	$= 0,$
1	Syzygante	$[ffvv]_6$	$= 0,$
2	Syzyganten	$[fvvv]_6$	$= 0$

und

1 Syzygante $[qq_1fq_2q_3\varphi]_6 = 0,$

Da die 3 ersten Symbole sämmtlich durch $(f\varphi\psi) = 0$ ausgedrückt werden können, so folgt, dass im Ganzen 139 Grundsyzyganten allein durch das Symbol $(f\varphi\psi)$ darstellbar sind. Doch wird man die Symbole $[f\varphi\psi\chi]_2$ und $\{f\varphi\psi\chi\}_2$ aus dem Grunde beibehalten, weil die *Auswerthung* dieser Syzyganten wesentlich leichter ist, abgesehen davon, dass letztere Relation auch in der Regel auf *kürzere* Ausdrücke führt. So besitzen beispielsweise die Syzyganten vom Grade 13 und der Ordnung 14 $\{Him\Delta\}_2$ und $\{fHnl\}_2$ nur 7 und 8 Terme, während die entsprechenden $[Hmi\Delta]_2$ und $[fnHl]_2$ deren 12 und 17 enthalten. (Vgl. v. Gall a. a. O. pag. 73). Von den übrigen Symbolen könnten nur dann einige entbehrt werden, wenn man die Bedingung fallen lässt, dass jede Syzygante unabhängig von den übrigen erhalten werden soll.

§ 7.

Die Bedeutung der partiellen Differentialgleichung $\sum \frac{\partial C}{\partial a_i} = 0$ für die Invarianten und Covarianten einer binären Form.

Im Anschlusse an das in § 3 eingeschlagene Verfahren zur Prüfung der elementaren *Syzyganten* soll nun allgemein der Nachweis geführt werden, dass die in jenem Paragraphen angeführte Differentialgleichung auch schon zu den *Invarianten* und *Covarianten* einer binären Form in engster Beziehung steht. Indem man die allgemeinste Lösung dieser Differentialgleichung sucht, gelangt man dann zu einer symbolischen Darstellung dieser Bildungen, aus der sich die von Clebsch benützte als specieller Fall ableiten lässt.

Sei C eine Covariante der Form f, die in den Coefficienten von f vom i^{ten} Grade sei, dann kann dieselbe durch Anwendung des Aronhold'schen Processes zunächst als simultane Covariante der i Potenzen $(\alpha_\lambda x_1 + a_\lambda x_2)^n$ $\lambda = 1, 2, \ldots i$ dargestellt werden, so dass die Coefficienten $\alpha_\lambda^r a_\lambda^{n-r}$ dieser symbolischen Potenzen *linear* in C auftreten. Die vier partiellen Differentialgleichungen (Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie pag. 125), denen C genügen muss, gehen nun, weil die Operationen

$$n \frac{\partial}{\partial \bar{a}_0} \bar{a}_0 + (n-1) \frac{\partial}{\partial \bar{a}_1} \bar{a}_1 + (n-2) \frac{\partial}{\partial \bar{a}_2} \bar{a}_2 + \cdots,$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{a}_1} \cdot \bar{a}_0 + \quad 2 \frac{\partial}{\partial \bar{a}_2} \cdot \bar{a}_1 + \quad 3 \frac{\partial}{\partial \bar{a}_3} \cdot a_2 + \cdots \text{ etc.}$$

sobald C in die angegebene symbolische Gestalt gebracht ist, einfach durch

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_\lambda} \alpha_\lambda, \quad \frac{\partial}{\partial a_\lambda} \alpha_\lambda, \text{ etc.}$$

ersetzt werden können, in die folgenden über:

$$(1) \quad \begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^{i} \frac{\partial C}{\partial \alpha_\lambda} \alpha_\lambda - \sum x_1 \frac{\partial C}{\partial x_1} &= g \cdot C, \\ \sum_{\lambda=1}^{i} \frac{\partial C}{\partial \alpha_\lambda} \cdot a_\lambda - \sum x_1 \frac{\partial C}{\partial x_2} &= 0, \\ \sum_{\lambda=1}^{i} \frac{\partial C}{\partial a_\lambda} \alpha_\lambda - \sum x_2 \frac{\partial C}{\partial x_1} &= 0, \\ \sum_{\lambda=1}^{i} \frac{\partial C}{\partial a_\lambda} a_\lambda - \sum x_2 \frac{\partial C}{\partial x_2} &= g \cdot C. \end{aligned}$$

Hierin erstrecken sich die an zweiter Stelle auftretenden Summen über alle etwa in C vorkommenden Reihen von Veränderlichen, während g das Gewicht des Leitgliedes der Covariante ist.

Es ist nun die Bemerkung von Wichtigkeit, *dass in den symbolischen Formen* $(\alpha_\lambda x_1 + a_\lambda x_2)^n$ *von* f *durchweg* $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha$ *gesetzt werden darf, ohne dass in der Covariante* C *beim Uebergange zum wirklichen Werthe irgend eine Vieldeutigkeit der zu ersetzenden Symbole eintreten kann.* Denn jeder Coefficient $\bar{a}_r$ von f ist durch das Symbol $\alpha^{n-r} a_\lambda^r$ genügend bestimmt, ausgenommen der erste Coefficient $\bar{a}_0$, der, weil a_λ^0 stets den Werth 1 besitzt, nur durch das eine Symbol α^n vertreten ist. Allein da die Covariante C in den Coefficienten $\bar{a}_r$ *homogen* ist, so hat $\bar{a}_0$ auf den Werth derselben nur insoferne

Einfluss, als durch Zufügung passender Potenzen von $\bar{a}_0$ die Homogenität der Covariante hergestellt wird. Sind daher die übrigen Coefficienten von f durch Symbole eindeutig bestimmt, dann ist die Covariante C ebenfalls eindeutig bestimmt, und es kann demnach überhaupt jedes Symbol für $\bar{a}_0$ entbehrt werden d. h. es ändert sich nichts, wenn auch $\alpha = 1$ angenommen wird.

Unter dieser Voraussetzung reduciren sich die obigen Differentialgleichungen auf die folgenden beiden:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^{i} \frac{\partial C}{\partial a_\lambda} - \sum x_2 \frac{\partial C}{\partial x_1} &= 0, \\ \sum_{\lambda=1}^{i} \frac{\partial C}{\partial a_\lambda} a_\lambda - \sum x_2 \frac{\partial C}{\partial x_2} &= g \cdot C. \end{aligned}$$

Es ist nun die Annahme gestattet, dass in der Covariante C nur eine Reihe Veränderlicher vorkomme, und es zeigt sich dann, dass die Covariante schon durch ihren ersten Coefficienten C_0 vollständig bestimmt ist. Suchen wir nun die erhaltenen Differentialgleichungen auf den Coefficienten C_0 zu transformiren, so ergiebt sich einfach

$$(3)\qquad \sum_{\lambda=1}^{i} \frac{\partial C_0}{\partial a_\lambda} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{\lambda=1}^{i} \frac{\partial C_0}{\partial a_\lambda} a_\lambda = g \cdot C_0 .$$

Die letztere Gleichung verlangt bekanntlich nur, dass C_0 in den Symbolen $a_1, a_2, \ldots a_i$ homogen sei und zwar von der Ordnung g, während die erste Gleichung die eigentliche Bestimmungsgleichung für C_0 ist. Man hat daher das Resultat:

(4) *Sei φ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung* $\sum_{\lambda=1}^{i} \frac{\partial \varphi}{\partial a_\lambda} = 0$, *welche in den Variablen $a_1, a_2, \ldots a_i$ rational ganz und homogen sei, und man ersetzt in φ jede Potenz a_λ^r durch $\bar{a}_r$, fügt ferner passende Potenzen von $\bar{a}_0$ zu, um die erhaltene Function in $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots \bar{a}_n$ homogen zu machen, dann ergiebt sich das Leitglied einer Covariante der Form f mit den Coefficienten $\bar{a}_r$.*

Damit ist es gelungen, die oben angeschriebenen 4 Differentialgleichungen auf eine einzige zu reduciren und man erkennt daraus, dass die übrigen 3 durch die Forderungen der Homogenität zugleich befriedigt sind. Es bedarf kaum einer besonderen Erwähnung, dass nicht nur jede Covariante von f der in Rede stehenden Differentialgleichung Genüge leistet, sondern dass auch jede Lösung der letzteren zur Bildung einer Covariante von f die Veranlassung giebt, sobald die Ordnungen

der Symbole a_r die Zahl n nicht überschreiten. Wie die allgemeinste Lösung dieser Differentialgleichung unter diesen Bedingungen aufgefunden werden kann, soll im nächsten Paragraphen gezeigt werden.

§ 8.

Die allgemeinste symbolische Darstellung der Covarianten einer binären Form.

Nach einem von Hesse, Crelle's Journal Bd. 42 bewiesenen Satze ist die homogene ganze Function $\varphi(a_1\, a_2 \ldots a_i)$ durch die partielle Differentialgleichung

$$\text{(I)} \qquad \sum_{\lambda=1}^{i} \frac{\partial \varphi}{\partial a_\lambda} = 0$$

derart specialisirt, dass sie als ganze homogene Function von nur $i-1$ Variabeln dargestellt werden kann. In der That, setzt man

$$\text{(II)} \qquad a_1 = \varrho a_1',\ a_2 = a_2' + \varrho a_1',\ a_3 = a_3' + \varrho a_1' \text{ etc.}$$

dann wird

$$\varphi(a_1\, a_2 \cdots a_i) = \varphi(0,\, a_2',\, a_3',\, \cdots a_i') + \varrho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=0} + \cdots$$

und weil

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=0} = a_1' \left[\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_i}\right] = 0,$$

ferner auch alle folgenden Glieder verschwinden, so ist φ als ganze homogene Function der $i-1$ Grössen $a_2'\, a_3' \ldots a_i'$ dargestellt. Ist φ in der letzteren Form gegeben, so lässt sich dadurch wieder zu der Function von i Veränderlichen zurückkehren, dass man die Substitutionen vornimmt:

$$\text{(III)} \qquad a_2' = a_2 - a_1,\quad a_3' = a_3 - a_1,\quad a_4' = a_4 - a_1,\quad \text{etc.}$$

und diese Function genügt auch stets der Gleichung (I). Demnach lässt sich die allgemeinste Lösung von (I) auf folgende Weise construiren: Man stellt zunächst die allgemeinste Function von $i-1$ homogenen Veränderlichen $a_2'\, a_3' \ldots a_i'$ auf, deren Ordnung gleich g sei und in der keine Variable in einer höhern Potenz als n auftritt. Durch die Substitutionen (III) gelangt man alsdann zur allgemeinsten Lösung von (I). Dieser Weg kann dann immer eingeschlagen werden, wenn $g \leq n$ ist und mit diesem Falle wollen wir uns zunächst beschäftigen.

Die allgemeine homogene Function von $i-1$ Veränderlichen enthält $\binom{g+i-2}{i-2}$ Constante. Dieselbe kann daher als Summe von ebensovielen g^{ten} Potenzen angenommen werden:

$$\varphi(a_2' a_3' \cdots a_i') = \sum_k c_k(\lambda_2^{(k)} a_2' + \lambda_3^{(k)} a_3' + \cdots + \lambda_i^{(k)} a_i')^g,$$

worin die Zahlen $\lambda^{(k)}$ derart gewählt sein müssen, dass zwischen diesen Potenzen keine lineare Relation stattfindet. Durch die Substitutionen (III) ergiebt sich nun

$$\varphi(a_1 a_2 \cdots a_i) = \sum_k c_k(\lambda_1^{(k)} a_1 + \lambda_2^{(k)} a_2 + \cdots + \lambda_i^{(k)} a_i)^g$$

mit den Bedingungen

$$\lambda_1^{(k)} + \lambda_2^{(k)} + \cdots + \lambda_i^{(k)} = 0.$$

Damit ist die allgemeinste Lösung der Differentialgleichung (I) für den Fall, dass $g \leqq n$ ist, aufgestellt und es wird später auch hiervon Gebrauch gemacht werden.

Ist nun $g > n$, dann kann zwar in ähnlicher Weise verfahren werden; allein nach Ausführung der Substitutionen (III) erscheint dann das Symbol a_1 in einer Potenz $g > n$, während die übrigen Symbole nach Annahme höchstens bis zur n^{ten} Potenz vorkommen. Um diese einseitige Bevorzugung eines Symbols zu umgehen, suchen wir zunächst diejenigen Lösungen der Gleichung (I), welche von der ersten Ordnung sind, und die in der Form

$$A_\lambda = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_i a_i,$$
$$\lambda_1 \quad + \lambda_2 \quad + \cdots + \lambda_i = 0$$

darstellbar sind und nennen jede solche ein *Grundsymbol*. Die *einfachsten* Grundsymbole sind dann $a_r - a_s$, deren Rang gleich 2 ist, während z. B. $a_1 + 2a_2 - 3a_3$ ein Grundsymbol vom Range 3 ist.

Es ist dann klar, dass nur $i - 1$ unabhängige Grundsymbole existiren und dass jede Lösung der Gleichung (I) durch diese rational und ganz ausgedrückt werden kann. Bildet man demnach aus g Grundsymbolen ein Product, in welchem jedes Symbol a höchstens in der n^{ten} Potenz vorkommt, so hat man die symbolische Darstellung für das Leitglied einer Covariante von f. Auch erhält man die ganze Covariante aus ihrem Leitgliede einfach auf folgende Weise*). Man ersetze jedes Symbol α_λ^r durch den Differentialquotienten $(n-r)! \cdot \frac{d^r f}{dx^r}$, wobei f in nicht homogenen Veränderlichen $\frac{x_1}{x_2} = x$ geschrieben gedacht wird. Dann erhält man die ganze Covariante bis auf einen Zahlenfactor.

*) Dieser Uebergang wurde von mir angegeben und benutzt, Math. Ann. Bd. 22, pag. 402. Ausführlicher behandelt wurde diese Frage von Hilbert ebenda Bd. 30. pag. 15. Jede Unterscheidung zwischen einer Covariante und ihrem Leitgliede wird dadurch aufgehoben. Vgl. auch § 9 Anm.

Es gilt demnach der Satz:

Jedes Product von g Grundsymbolen $\Sigma \lambda_k a_k$ $(\Sigma \lambda_k = 0)$, *in welchem jedes Symbol* a_k *höchstens bis zur* n^{ten} *Ordnung vorkommt, ist der symbolische Ausdruck für das Leitglied einer Covariante von f. Man erhält diese selbst, indem man z. B. das Symbol* a_k^r *durch* $(n-r)! \frac{d^r f}{dx^r}$ *ersetzt.*

Wählt man sämmtliche Grundsymbole in der einfachsten Gestalt $a_r - a_s$, so ergiebt sich die von Clebsch begründete symbolische Darstellung der Covarianten von f. Indem man nämlich jedes Symbol a_r durch Einführung von $\frac{a_r}{\alpha_r}$ homogen macht und die Linearfactoren $\alpha_r x_1 + a_r x_2$ passend zugefügt, tritt an Stelle jeder Differenz $a_r - a_s$ der Klammerfactor*) $(a_r \alpha_s - \alpha_r a_s)$ und man erhält genau den Werth der Covariante in der Darstellungsweise von Clebsch.

§ 9.

Umsetzung der Symbole von Clebsch in Grundsymbole und umgekehrt.

Wenn eine Covariante der Form f in der Symbolik von Clebsch gegeben ist, so lässt sich dieselbe durch Grundsymbole in folgender Weise darstellen. Zunächst ist erforderlich, dass in allen symbolischen Factoren $\alpha_k x_1 + a_k x_2$ $\alpha_k = 1$ gesetzt wird, wodurch alle Klammerfactoren in einfache Differenzen übergehen. Es möge dann derjenige Theil der Klammerfactoren, in welchem das Symbol a_1 vorkommt, abgesondert werden:

$$p_1 = (a_1 - a_2)^{n_{12}} (a_1 - a_3)^{n_{13}} \cdots (a_1 - a_\nu)^{n_{1\nu}}.$$

Setzt man vorübergehend $a_1 - a_\varrho = a_\varrho'$, so kann p_1 als Summe von Potenzen der Functionen $\Sigma \lambda_\varrho a_\varrho'$ dargestellt werden und indem man rückwärts zu den Symbolen a_ϱ übergeht, ergiebt sich die Beziehung

$$p_1 = \sum_r (\lambda_1^{(r)} a_1 + \lambda_2^{(r)} a_2 + \cdots + \lambda_\nu^{(r)} a_\nu)^{n_1} \qquad \lambda_1^{(r)} + \cdots + \lambda_\nu^{(r)} = 0.$$

Demnach tritt nach dieser Umformung das Symbol a_1 nur noch in *Grundsymbolen* auf, die vom ν^{ten} Range sind. In gleicher Weise lässt sich nun mit den weitern Symbolen $a_2, a_3 \ldots$ etc. verfahren und es ergiebt sich schliesslich die folgende Darstellung der Covariante C

$$C = \sum_\lambda c_\lambda (a_1 a_2 \ldots a_\nu)^{n_1} (a_2 a_3 \ldots a_{\nu_1})^{n_2} \ldots (a_{i-1} a_i)^{n_i} \prod_{\varrho=1}^{\varrho=i} (x_1 + a_\varrho x_2)^{m_\varrho},$$

*) Die Bezeichnung der symbolischen Determinante als „Klammerfactor" wurde von Gordan eingeführt.

worin die Grundsymbole abgekürzt durch $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_r)$ etc. bezeichnet sind. Während nun ursprünglich in der Covariante C im ganzen $\frac{i(i-1)}{2}$ verschiedene symbolische Klammerfactoren enthalten sein konnten, treten jetzt deren höchstens $i-1$ auf und darin liegt ein wesentlicher Vorzug dieser neuen symbolischen Darstellungsweise.

Es möge umgekehrt der Werth einer Covariante in *Grundsymbolen* gegeben sein und zwar sei das Leitglied derselben

$$C_0 = \prod_k (\lambda_1^{(k)} a_1 + \lambda_2^{(k)} a_2 + \cdots + \lambda_i^{(k)} a_i),$$

dann kann dieselbe durch andere Covarianten linear ausgedrückt werden, welche sämmtlich durch einfache Klammerfactoren dargestellt sind. Da nämlich in jedem Grundsymbole $\sum_r \lambda_r = 0$ ist, so folgt

$$\lambda_1^{(k)} a_1 + \lambda_2^{(k)} a_2 + \cdots + \lambda_i^{(k)} a_i = \lambda_2^{(k)}(a_2 - a_1) + \lambda_3^{(k)}(a_3 - a_1) + \cdots + \lambda_i^{(k)}(a_i - a_1)$$

und es kann daher die Covariante C, indem alle Grundsymbole in dieser Weise umgeformt werden, als Function der Differenzen $a_r - a_s$ dargestellt werden. Durch Entwicklung nach Potenzen und Producten dieser Grössen erhält man dann unter Berücksichtigung des am Schlusse des § 8 Gesagten nur Covarianten, die in den Symbolen von Clebsch ausgedrückt sind.*) Man hat somit das Resultat:

> *Jede Covariante, welche in den Symbolen von Clebsch gegeben ist, kann durch solche Covarianten linear dargestellt werden, die sämmtlich in Grundsymbolen ausgedrückt sind, und umgekehrt.*

Die Benützung der Grundsymbole statt der einfachen Klammerfactoren hat nun den Vortheil, dass in den Covarianten *weniger verschiedenartige symbolische Factoren* auftreten. So kann z. B. die Covariante $T = (ab)^2(bc)a_x^{n-2}b_x^{n-3}c_x^{n-1}$, in welcher die zwei verschiedenen symbolischen Factoren (ab) und (bc) vorkommen, nunmehr durch $(a+b-2c)^3$ dargestellt werden, wobei nur das eine Grundsymbol $a+b-2c$ verwendet ist. Bei Covarianten höherer Grade tritt dieser Vortheil noch deutlicher hervor.

§ 10.

Das Formensystem einer Form unbegrenzt hoher Ordnung.

Wenn die Ordnung der Ausgangsform f stets höher bleibt, als das Gewicht der zu betrachtenden Covarianten, dann sind nach § 8 alle Covarianten vom Gewichte g und dem Grade i durch die folgenden

*) Auf diesem Wege kann man auch einen Uebergang vom Leitgliede einer Covariante zu dieser selbst herstellen, da nur die Linearfactoren $\alpha_r x_1 + \alpha_r x_2$ *nach* der Entwicklung passend zuzufügen sind.

$$P = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_i a_i)^g$$

linear ausdrückbar. Die *Leitglieder* aller Covarianten von f wurden von Sylvester und Cayley Seminvarianten genannt, doch werde ich im folgenden den Ausdruck *Potenziante* gebrauchen, um die symbolische Darstellungsform dieser Seminvarianten anzudeuten. Es gilt demnach der Satz:

Alle Seminvarianten vom Grade i und dem Gewichte g sind durch Potenzianten $(\lambda_1 a_1 + \lambda_1 a_2 + \cdots + \lambda_i a_i)^g$ linear ausdrückbar.

Um alle *linear unabhängigen* Potenzianten vom Grade i und dem Gewichte g zu finden, hat man nun für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_i$ alle möglichen verschiedenen Werthe anzunehmen, welche der Bedingung $\sum_r \lambda_r = 0$ Genüge leisten, und aus allen entsprechenden Potenzianten die linear unabhängigen auszuwählen. Die Zahl dieser kann aber leicht bestimmt werden. Entwickelt man nämlich

$$P_0 = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_i a_i)^g$$

nach Potenzen der Symbole a_r und setzt statt $a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_i^{r_i}$ die realen Werthe $a_{r_1} a_{r_2} \ldots a_{r_i}$, dann ergiebt sich

$$P_0 = \sum_r c_r (r_1 r_2 \ldots r_i) \cdot a_{r_1} a_{r_2} \ldots a_{r_i},$$

worin die c_r Polynomialcoefficienten und $(r_1 r_2 \ldots r_i)$ die symmetrischen Functionen $\Sigma \lambda_1^{r_1} \lambda_2^{r_2} \ldots \lambda_i^{r_i}$ darstellen. Vermöge der Beziehung $\sum_r \lambda_r = 0$ können nun aber zwischen den symmetrischen Functionen $(r_1 r_2 \ldots r_i)$ lineare Relationen aufgefunden werden. Man erhält sie dadurch, dass man sämmtliche $(r_1 r_2 \ldots r_i)$ durch die elementaren symmetrischen Functionen $e_1 e_2 \ldots e_i$ der λ ausdrückt, sodann $e_1 = 0$ setzt und die andern e eliminirt. Es bleiben dann so viele Terme linear unabhängig, als die Gleichung

$$2\mu_2 + 3\mu_3 + \cdots + i\mu_i = g \tag{1}$$

ganzzahlige Lösungen besitzt, entsprechend der Anzahl der Producte $c_2^{\mu_2} c_3^{\mu_3} \ldots c_i^{\mu_i}$ von der Gesammtordnung g in den λ. Sei N_g diese Zahl, dann ist demnach P_0 durch N_g symmetrische Functionen $(r_1 r_2 \ldots r_i)$ ausgedrückt

$$P_0 = \sum_{r=1}^{N_g} c_r (r_1 r_2 \ldots r_i) A_r \tag{2}$$

wobei jedoch nunmehr die Coefficienten A_r Seminvarianten sind, da sie einzeln der Differentialgleichung (I) § 8 Genüge leisten müssen.

Da ferner jede der Seminvarianten A_r einen Term $a_{r_1} . a_{r_2} \ldots a_{r_i}$ enthält, der in keiner anderen Seminvariante mehr vorkommt, so folgt zugleich, dass diese N_g Seminvarianten auch *linear unabhängig* sind. An Stelle der N_g symmetrischen Functionen $(r_1\, r_2 \ldots r_i)$ kann man offenbar in (2) auch die N_g Producte der elementaren symmetrischen Functionen einführen, da beide gegenseitig linear ausdrückbar sind. Daher gilt der Satz:

Entwickelt man die Potenziante $(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_i a_i)^g$ *nach elementaren symmetrischen Functionen der* λ *und setzt* $\Sigma \lambda_r = 0$, *dann erhält man als Coefficienten alle linear unabhängigen Seminvarianten vom Grade* i *und dem Gewichte* g.

Um z. B. alle Seminvarianten vom Grade 3 und dem Gewichte 6 zu erhalten, entwickelt man die Potenziante

$$p_0 = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3)^6$$

nach symmetrischen Functionen der λ und erhält, nachdem $e_1 = 0$ gesetzt ist,

$$\begin{aligned} p_0 = &- e_2{}^3(\bar{a}_0\bar{a}_6 - 6\,\bar{a}_1\bar{a}_5 + 15\,\bar{a}_2\bar{a}_4 - 10\,\bar{a}_3{}^2)\,\bar{a}_0 \\ &+ 3\,e_3{}^2(\bar{a}_0{}^2\bar{a}_6 - 6\,\bar{a}_0 a_1\bar{a}_5 - 15\,\bar{a}_0\bar{a}_2\bar{a}_4 + 20\,\bar{a}_0\bar{a}_3{}^2 - 60\,\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3 \\ &\qquad + 30\,\bar{a}_1{}^2 a_4 + 30\,\bar{a}_2{}^3). \end{aligned}$$

Daher giebt es nur die angeschriebenen beiden linear unabhängigen Seminvarianten. Bildet man nun durch Einführung von Zahlenwerthen an Stelle der λ specielle Potenzianten:

$$(a_1 + a_2 - 2a_3)^6, \quad (a_1 + 2a_2 - 3a_3)^6, \quad \text{etc.}$$

so können deren nur 2 linear unabhängige existiren. Wegen der kürzeren Darstellungsweise erweist es sich nun als vortheilhaft, alle Seminvarianten durch solche passend gewählte Potenzianten auszudrücken. Setzt man zu diesem Zwecke in der Entwicklung

$$(3) \qquad (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_i a_i)^g = \sum_r c_r\, e_2{}^{r_2}\, e_3{}^{r_3} \ldots e_i{}^{r_i} B_r$$

für die Grössen λ_1, λ_2, $\lambda_3 \ldots \lambda_i$ nach und nach solche numerische Werthe, dass die Determinante aus den Zahlencoefficienten der B_r nicht verschwindet, so ergeben sich lineare Gleichungen, aus denen die N_g Unbekannten B_r bestimmt werden können. *Jede Seminvariante kann daher durch* N_g *linear unabhängige Potenzianten linear ausgedrückt werden.* (Vgl. die Anmerkung am Schlusse).

§ 11.

Symbolische Darstellung von Perpetuanten.

Eine Seminvariante wird *reducibel* genannt, wenn sie als ganze rationale Function von Seminvarianten niederer Grade dargestellt

werden kann. Wenn alle *reducibeln* Seminvarianten ausgeschieden sind, so wird noch ein Theil derselben zurückbleiben, die von Sylvester Perpetuanten genannt worden sind. Diese Formen sind in gewissen Sinne identisch mit den von Gordan bei Aufstellung vollständiger Formensysteme verwendeten „herübergenommenen Formen", insoferne alle Perpetuanten (für die betreffende Form f) in letzteren enthalten sind.

Die Darstellung aller Seminvarianten durch Potenzianten gestattet nun, ohne grosse Mühe alle *reducibeln* Seminvarianten auszuscheiden. Die Potenziante

$$(1) \qquad (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_i a_i)^g \qquad \sum_{r=1}^{i} \lambda_r = 0$$

ist offenbar immer dann reducibel, wenn die Summe aus einem Theile der Grössen λ_r für sich verschwindet. Alsdann lässt sich das Grundsymbol in 2 Theile zerlegen

$$(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_\varrho a_\varrho) + (\lambda_{\varrho+1} a_{\varrho+1} + \cdots + \lambda_i a_i)$$

und als Binom entwickeln, so dass eine ganze Function von Potenzianten niederer Grade erhalten wird. Bei Bildung der Gleichungen (3) des § 10 wird man daher eine möglichst grosse Zahl solcher reduciblen Potenzianten verwenden.

Beginnen wir mit den Potenzianten, für welche einfach $\lambda_1 = 0$ ist, und die in Folge dessen durch Multiplication der Potenzianten vom Grade $i - 1$ mit $\bar{a}_0$ gewonnen werden können, so zeigt sich, dass für alle diese Potenzianten $e_i = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_i = 0$ ist, während die übrigen symmetrischen Functionen $e_2, \ldots e_{i-1}$ von einander unabhängig bleiben. In den Gleichungen (3) des § 10 verschwinden nun alle Glieder, welche den Factor e_i besitzen und deren giebt es so viele, als die Gleichung

$$(2) \qquad 2\mu_2 + 3\mu_3 + \cdots + i\mu_i = g - i$$

ganzzahlige Lösungen besitzt. Sei diese Zahl $N_{g\ i}$, dann sind demnach $N_g - N_{g-i}$ Seminvarianten B_r durch ebensoviele lineare Gleichungen auf die in Rede stehenden zerfallenden Formen $(1 \,.\, i - 1)$ reducirbar.

In gleicher Weise können nun diejenigen Seminvarianten zur Reduction herangezogen werden, welche durch Multiplication der Formen 2^{ten} Grades mit den Formen $(i-2)^{\text{ten}}$ Grades entstehen. Wählen wir in (1) $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, so ergeben sich durch Variation der Zahlen λ alle diese Producte. In der Gleichung (3) des § 10 führen wir nun die symmetrische Function

$$(3) \quad p_2 = \prod(\lambda_1 + \lambda_2) = \sum_r c_r e_2^{r_2} e_3^{r_3} \ldots e_i^{r_i} \quad 2r_2 + 3r_3 + \cdots = \binom{i}{2}$$

ein, indem wir möglichst viele Producte der e durch p_2 zu ersetzen suchen, und zwar nur solche Producte, deren Factoren B noch nicht als reducibel nachgewiesen sind. Da nun p_2 in den λ vom Grade $\binom{i}{2}$ ist, so sind $N_{g-\binom{i}{1}-\binom{i}{2}}$ Producte der e durch p_2 ersetzbar. Dann nimmt die Gleichung (3) § 10 die Form an

$$(4)\quad (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_i a_i)^g = \sum_r c_r e_2^{r_2} e_3^{r_3} \ldots e_{i-1}^{r_{i-1}} B_r + e_i \sum_r c'_r e_2^{r_2} e_3^{r_3} \ldots e_i^{r_i} B'_r$$

$$+ e_i p_2 \sum_r c''_r e_2^{r_2} e_3^{r_3} \ldots e_i^{r_i} B''_r.$$

Setzt man darin solche Zahlenwerthe der λ, welche den Bedingungen $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i = 0$ genügen, so werden in den entstehenden Gleichungen alle Terme mit dem Factor p_2 fehlen. Ausser den schon als reducibel nachgewiesenen Formen B_r treten in diesen Gleichungen nur die Formen B'_r auf, deren Zahl

$$N_{g-i} - N_{g-\binom{i}{1}-\binom{i}{2}}$$

beträgt und diese können daher auf die zerfallenden Formen $(2 \cdot i - 2)$ reducirt werden. Da die Coefficienten der B', wenn $p_2 = 0$ ist, auch linear unabhängig sein müssen, so folgt auch, dass in den entstehenden Gleichungen die Determinante der Coefficienten bei passender Wahl der λ einen von Null verschiedenen Werth besitzt.

Weiterhin können in gleicher Weise die Producte $(3 \cdot i - 3)$, $(4 \cdot i - 4)$ etc. zur Reduction der Seminvarianten B'', B''' etc. verwendet werden. Bezeichnen wir die hiebei auftretenden symmetrischen Functionen

$$\prod(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \quad \prod(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4), \text{ etc.}$$

durch $p_3, p_4, \ldots p_{\frac{i}{2}}$ für ein gerades i (bez. $p_{\frac{i-1}{2}}$ für ein ungerades i), dann kann die Gleichung (3) des § 10 schliesslich in folgende Form gebracht werden

$$(5)\quad (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_i a_i)^g$$

$$= R + e_i \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{\frac{i}{2}} \left(p_{\frac{i-1}{2}}\right) \cdot \sum_r c_r e_2^{r_2} \cdots e_i^{r_i} C_r.$$

Darin enthält R alle *reduciblen* Seminvarianten, während die Formen C_r die eigentlichen Perpetuanten sind. Dass diese *irreducibel* sind, folgt daraus, dass bei dem eingeschlagenen Verfahren *sämmtliche* Producte aus Perpetuanten niederer Grade zur Verwendung gekommen

sind. Um die Zahl der Perpetuanten C_r zu bestimmen, suchen wir zuerst den Grad des Factors

$$p = e_i \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{\frac{i}{2}} \binom{p_{\frac{i-1}{2}}}{2}$$

in Bezug auf die λ. Dieser ist

$$\binom{i}{1} + \binom{i}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\binom{i}{\frac{i}{2}} = \frac{1}{2}2^i - 1 = 2^{i-1} - 1 \text{ wenn } i \text{ gerade},$$

und

$$\binom{i}{1} + \binom{i}{2} + \cdots + \binom{i}{\frac{i-1}{2}} = \frac{1}{2}2^i - 1 = 2^{i-1} - 1 \text{ wenn } i \text{ ungerade},$$

somit in beiden Fällen $2^{i-1} - 1$. Daher ist die Zahl der Formen C_r einfach $N_{g-2^{i-1}+1}$:

Die Zahl der Perpetuanten vom Grade i und dem Gewichte g ist gleich der Zahl ganzzahliger Lösungen der Gleichung

$$2\mu_2 + 3\mu_3 + \cdots + i\mu_i = g - 2^{i-1} + 1.$$

Dieser Satz wurde für die einfachsten Fälle $i = 3, 4, 5$ von Cayley Amer. Journal of Math. Vol. VII, bewiesen, der allgemeine Beweis wurde — mit anderen complicirteren Hilfsmitteln — von Mac Mahon ebenda Vol. VII und VIII geführt.

Die entwickelte Methode kann jedoch nicht allein zur Bestimmung der *Zahl* der Perpetuanten dienen, sondern es lassen sich auch diese Perpetuanten selbst in Gestalt von Potenzianten sofort anschreiben. Wählen wir in (5) die Zahlen λ so, dass die Potenziante links nicht zerfällt, dann wird auch das Product $e_i \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots$ nicht verschwinden. Es lassen sich nun offenbar $N_{g-2^{i-1}+1}$ solcher Gleichungen bilden, aus denen die Perpetuanten C_r linear durch die gewählten Potenzianten ausgedrückt werden können. Diese Gleichungen sind nun ganz analog den Gleichungen (3) des § 10 zu bilden, wenn dort das Gewicht gleich $g - 2^{i-1} + 1$ angenommen wird und wenn keine der Potenzianten zerfällt. Sind jene Gleichungen auflösbar, dann sind es auch die Gleichungen (5). Daher kann man sagen:

Wenn alle linear unabhängigen, nicht zerfallenden Potenzianten vom Gewichte $\gamma = g - 2^{i-1} + 1$ *durch*

$$(\lambda_1^{(1)}a_1 + \cdots + \lambda_i^{(1)}a_i)^\gamma, \quad (\lambda_1^{(2)}a_1 + \cdots + \lambda_i^{(2)}a_i)^\gamma, \text{ etc.}$$

dargestellt sind, dann sind

$$(\lambda_1^{(1)}a_1 + \cdots + \lambda_i^{(1)}a_i)^g, \quad (\lambda_1^{(2)}a_1 + \cdots + \lambda_i^{(2)}a_i)^g, \text{ etc.}$$

alle Perpetuanten vom gleichen Grade i und dem Gewichte g.

§ 12.

Das ternäre Grundsymbol.

Auch die Covarianten von Formen mit mehr Veränderlichen lassen sich in derselben Weise symbolisch darstellen, wie dies im Vorigen für Covarianten von binären Formen durchgeführt wurde.

Sei f eine ternäre Form, dann können Contravarianten und Zwischenformen von f dadurch aus der Betrachtung ausgeschlossen werden, dass man in allen Covarianten zwei Reihen Veränderlicher x und y zulässt. Denn jede derartige Form geht durch die Substitutionen

$$u_1 = x_2y_3 - x_3y_2, \quad u_2 = y_1x_3 - x_1y_3, \quad u_3 = x_1y_2 - x_2y_1$$

in eine Covariante mit 2 Reihen Veränderlicher über.

Zunächst transformiren wir nun mittelst des Aronhold'schen Processes die Covariante C in eine simultane Covariante der Potenzen

$$(\alpha_1x_1 + a_1x_2 + b_1x_3)^n, \quad (\alpha_2x_1 + a_2x_2 + b_2x_3)^n, \quad \text{etc.}$$

so dass C in den Coefficienten jeder derselben *linear* wird. In dieser Gestalt genügt der Coefficient C_0 der höchsten Potenzen von x_1 und y_1 den 9 partiellen Differentialgleichungen

$$(1)\quad \begin{array}{lll} \sum_r \frac{\partial C_0}{\partial \alpha_r}\alpha_r = g.C_0, & \sum_r \frac{\partial C_0}{\partial \alpha_r}a_r = 0, & \sum_r \frac{\partial C_0}{\partial \alpha_r}b_r = 0, \\ \sum_r \frac{\partial C_0}{\partial a_r}\alpha_r = 0, & \sum_r \frac{\partial C_0}{\partial a_r}a_r = g.C_0, & \sum_r \frac{\partial C_0}{\partial a_r}b_r = 0, \\ \sum_r \frac{\partial C_0}{\partial b_r}\alpha_r = 0, & \sum_r \frac{\partial C_0}{\partial b_r}a_r = 0, & \sum_r \frac{\partial C_0}{\partial b_r}b_r = g.C_0. \end{array}$$

Da nun C in den Coefficienten von f *homogen* ist, so können die Symbole α_r entbehrt werden und man darf daher $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 1$ setzen. Dadurch reduciren sich die 9 Differentialgleichungen auf die folgenden 6:

$$(2)\quad \begin{array}{lll} \sum_r \frac{\partial C_0}{\partial a_r} = 0, & \sum_r \frac{\partial C_0}{\partial a_r}a_r = gC_0, & \sum_r \frac{\partial C_0}{\partial a_r}b_r = 0, \\ \sum_r \frac{\partial C_0}{\partial b_r} = 0, & \sum_r \frac{\partial C_0}{\partial b_r}a_r = 0, & \sum_r \frac{\partial C_0}{\partial b_r}b_r = gC_0. \end{array}$$

Setzen wir nun fest, dass C_0 sowohl in den a_r als auch in den b_r *homogen* vom Grade g sei, dann wird die 2^{te} und 6^{te} Differentialgleichung überflüssig. Ferner möge C_0 durch die Substitutionen

$$(3)\quad \begin{array}{l} a_2 - a_1 = a_2', \quad a_3 - a_1 = a_3', \ldots a_i - a_1 = a_i', \\ b_2 - b_1 = b_2', \quad b_3 - b_1 = b_3', \ldots b_i - b_1 = b_i' \end{array}$$

*

in eine ganze homogene Function der Grössen a' und b' übergehen, dann ist auch die erste und vierte Gleichung erfüllt. Es bleiben daher nur noch 2 der Gleichungen (2) übrig, die nach einfacher Transformation auf die Grössen a' und b' die Form annehmen

$$(4) \qquad \sum_{r=2}^{i} \frac{\partial C_0}{\partial a_r'} b_r' = 0, \qquad \sum_{r=2}^{i} \frac{\partial C_0}{\partial b_r'} a_r' = 0.$$

Die allgemeinste Lösung dieser beiden Gleichungen ist die ganze homogene Function der Determinanten $a_r' b_s' - a_s' b_r'$, welche in den a' und b' bis zum Grade g ansteigt und die in folgender Weise gebildet werden kann. Zunächst ist ersichtlich, dass die bilineare Function

$$A'_{\lambda\mu} = \begin{vmatrix} \lambda_2 a_2' + \cdots + \lambda_i a_i' & \lambda_2 b_2' + \cdots + \lambda_i b_i' \\ \mu_2 a_2' + \cdots + \mu_i a_i' & \mu_2 b_2' + \cdots + \mu_i b_i' \end{vmatrix}$$

eine Lösung der Gleichungen (4) ist. Jede andere Lösung derselben Ordnung kann nun aus dieser dadurch erhalten werden, dass man die Zahlen λ und μ zweckmässig variirt und aus allen entstehenden Functionen die Summe bildet. Da nämlich zwischen den Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_2 & \lambda_3 \cdots \lambda_i \\ \mu_2 & \mu_3 \cdots \mu_i \end{matrix} \right|$$

keine *lineare* Identität stattfindet, so lässt sich die allgemeine bilineare Lösung von (4) in der Weise

$$A' = c_0 A_0' + c_1 A_1' + \cdots$$

aus speciellen Lösungen zusammensetzen.

Jede Lösung von höherer Ordnung kann nun ebenfalls als Function der $A'_{\lambda\mu}$ dargestellt werden. Denn sei φ eine ganze homogene Function der $\binom{i-1}{2}$ Determinanten $a_r' b_s' - a_s' b_r'$ von der Ordnung g in den a' und b', dann besitzt dieselbe genau ebensoviele willkürliche Constanten, als die Potenz $A'^{g}_{\lambda\mu}$ linear unabhängige Terme enthält. Bringt man nämlich $A'_{\lambda\mu}$ in die Form

$$A_{\lambda\mu} = \sum_{r,s}' \begin{vmatrix} a_r' & a_s' \\ b_r' & b_s' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_r & \lambda_s \\ \mu_r & \mu_s \end{vmatrix}$$

und erhebt zur g^{ten} Potenz, dann wird zwischen den Producten der Determinanten $\lambda_r \mu_s - \lambda_s \mu_r$ eine gewisse Zahl linearer Relationen stattfinden. Ganz dieselben Relationen finden aber auch zwischen den Producten der Determinanten $a_r' b_s' - a_s b_r'$ statt, und es reducirt sich die Constantenzahl von φ um die gleiche Grösse. Daher gilt der Satz:

Jede Lösung der Differentialgleichungen (4), *welche von der g^{ten} Ordnung in jeder Variabelnreihe ist, kann durch die*

g^{ten} Potenzen der einfachsten Lösungen $A'_{\lambda\mu}$ linear ausgedrückt werden.

Kehrt man nun durch die Substitutionen (3) zu den Symbolen a_r und b_r zurück, dann wird aus $A'_{\lambda\mu}$ das *ternäre Grundsymbol:*

$$A_{\lambda\mu} = \begin{vmatrix} \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_i a_i & \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_i b_i \\ \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_i a_i & \mu_1 b_1 + \cdots + \mu_i b_i \end{vmatrix}$$

mit den Bedingungen

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i = 0,$$
$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i = 0.$$

Es hat auch hier keine Schwierigkeit, den Zusammenhang dieses Grundsymbols mit den Klammerfactoren von Clebsch herzustellen.

Ist die Ordnung von f unbegrenzt hoch, so dass stets $n \geqq g$ bleibt, dann wird der Coefficient C_0, der den Gleichungen (1) genügt, eine *ternäre Seminvariante* genannt. Es ergiebt sich aus dem Gesagten dann unmittelbar der Satz:

Alle ternären Seminvarianten vom Grade i und dem Gewichte g sind durch die g^{ten} Potenzen des ternären Grundsymbols $A_{\lambda\mu}$ linear ausdrückbar.

Es erweist sich daher auch hier zweckmässig, alle Seminvarianten durch solche ternäre *Potenzianten* $A^g_{\lambda\mu}$ darzustellen. Die Behandlung der übrigen Fragen, wie Zahl der linear unabhängigen Seminvarianten, Darstellung der Perpetuanten etc. kann dann in ähnlicher Weise durchgeführt werden, wie dies für binäre Formen oben geschehen ist.

München, im Januar 1890.

Anmerkung. Der in § 10 und weiterhin öfter benützte elementare Hilfssatz lautet: „Sind die Functionen $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_m$ der Variabeln $x_1 x_2 \ldots x_i$ *linear unabhängig*, dann können stets für die x m Werthereihen $x_1^{(\lambda)} \ldots x_i^{(\lambda)}$; $\lambda = 1, 2, \ldots m$ gefunden werden, so dass die Determinante aus den entsprechenden Functionen $\varphi_1^{(\lambda)} \ldots \varphi_m^{(\lambda)}$ $\lambda = 1, \ldots m$ nicht verschwindet.“ Der Beweis folgt aus dem Umstande, dass das in Bezug auf eine Reihe der x identische Verschwinden der Determinante bez. einer Unterdeterminante eine lineare Relation der φ zur Folge haben würde. Auf diesen Hilfssatz stützen sich auch zum Theil die Entwicklungen des § 12. Denn es ist deutlich, dass die allgemeine Function $a_1 y_1 + \cdots a_m y_m$ aus den speciellen Functionen $z_\lambda = \varphi_1^{(\lambda)} y_1 + \cdots + \varphi_m^{(\lambda)} y_m$ in der Weise erhalten werden kann:

$$a_1 y_1 + \cdots + a_m y_m = b_1 z_1 + b_2 z_2 + \cdots + b_m z_m.$$

Während demnach zwischen den Functionen φ_i Relationen von *höherer* als der *ersten* Ordnung existiren können, kann dies für die Combinationen

$$b_1 \varphi_i^{(1)} + \cdots + b_m \varphi_i^{(m)}$$

nicht mehr stattfinden, vielmehr müssen dieselben — bei willkürlich gedachten b — als völlig unabhängige Grössen betrachtet werden.

Anmerkung zu § 9. Zu der angegebenen Umsetzung eines Productes von Klammerfactoren in Grundsymbole ist noch zu bemerken, dass im Resultate unter gewissen Umständen ein Symbol a_r in einer höheren als der n^{ten} Potenz auftreten kann. Wäre z. B. die Invariante $j = (a_1 - a_2)^2 (a_1 - a_3)^2 (a_2 - a_3)^2$ einer Form 4^{ter} Ordnung durch Grundsymbole auszudrücken, so würde in den einzelnen Summanden des Resultats jedes Symbol a_2 und a_3 bis zur 6^{ten} Ordnung vorkommen, was im Allgemeinen vermieden werden muss. Es geschieht dies leicht dadurch, dass man zum Producte p_1 nur *einen Theil* der Differenzen $a_1 - a_r$ hinzunimmt, während die übrigen entweder ganz unverändert gelassen oder später zu einem der andern Producte $p_2, p_3, \ldots$ zugezogen werden können. Die Invariante j würde z. B. unter Berücksichtigung dieses Umstandes ihre Form beibehalten, ein Fall der nicht ausgeschlossen ist. Dagegen lässt sich z. B. die Covariante $(ab)^4 (ac)^2 (ad) b_x^3 c_x^5 d_x^6$ durch Formen $(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_3 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4)^7$ linear darstellen. Jeder specielle Fall erfordert daher eine kleine Modification des beschriebenen allgemeinen Verfahrens.